



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 29 de Abril de 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

El (Los) suscrito(s):

Jonathan Tapia Garzón

con C.C. No 1075 282 380

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado

Titulado: Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica presentado y aprobado en el año **2019** como requisito para optar al título de

**Físico**

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Jonathan Tapia Garzon

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica

**AUTOR O AUTORES:** Jonathan Tapia Garzón

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Tapia Garzón	Jonathan

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
González Sierra	Hernando

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Físico

**FACULTAD:** Ciencias Exactas y Naturales

**PROGRAMA O POSGRADO:** Física

**CIUDAD:** Neiva      **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019      **NÚMERO DE PÁGINAS:** 64

**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

Diagramas\_X\_ Fotografías\_\_\_ Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general\_X\_ Grabados\_\_\_  
Láminas\_\_\_ Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_  
Tablas o Cuadros\_X\_

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento:

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Límites	Limits	6. Cuántica	Quantum
2. Radiación	radiation	7. Planck	Planck
3. Constante	constant	8. Permitividad	Permittivity
4. Electrodinámica	electrodynamics	9. Energía	Energy
5. Clásica	classic	10. Cavidad	cavity

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se elabora una aproximación que muestra como los límites entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica pueden estar muy cercanos entre sí, en oposición a los criterios de autores que aducen lo contrario. Dado que es muy común encontrar que la física clásica no puede interpretar fenómenos a escalas microscópicas, debido a que los conceptos, postulados y el aparato matemático de la Mecánica cuántica no es susceptible de relacionarse completamente, y de manera generalizada, a partir de las formulaciones adecuadas de la mecánica clásica.

La aproximación consiste en la elaboración de un esquema basado en la electrodinámica clásica, incluida la teoría de la relatividad especial, para el caso de la radiación libre atrapada en un volumen de dimensiones finitas, la cual permite evaluar la densidad de la energía electromagnética almacenada en ese recinto.

El estudio cuantitativo y cualitativo de esta contribución difiere de las elaboraciones recientes sobre la explicación clásica del espectro de radiación emitido por los cuerpos calientes, en



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>3 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

que determinamos el factor de escala para estos procesos en términos de parámetros geométricos de la cavidad y de la permitividad del espacio libre. Un aspecto a destacar sobre este factor de escala, es que el valor teórico que hemos predicho es del orden de la constante de Planck; en este sentido, la última circunstancia coincide con la apreciación de algunos autores de que la misma constante de Planck es un factor de escala y no es una constante fundamental de la Física.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

In this work an approximation is elaborated that shows how the limits between classical mechanics and quantum mechanics can be very close to each other, in opposition to the criteria of authors who claim the opposite. Given that it is very common to find that classical physics can not interpret phenomena at microscopic scales, because the concepts, postulates and the mathematical apparatus of quantum mechanics is not capable of being completely related, and in a generalized way, from the formulations suitable for classical mechanics.

The approach consists in the elaboration of a scheme based on classical electrodynamics, including the theory of special relativity, for the case of free radiation trapped in a volume of finite dimensions, which allows to evaluate the density of the electromagnetic energy stored in that enclosure.

The quantitative and qualitative study of this contribution differs from the recent elaborations on the classical explanation of the radiation spectrum emitted by hot bodies, in which we determine the scale factor for these processes in terms of geometric parameters of the cavity and the permittivity of the free space. One aspect to note about this scale factor is that the theoretical value we have predicted is the order of the Planck constant; in this sense, the last circumstance coincides with the appreciation of some authors that the same Planck constant is a scale factor and is not a fundamental constant of Physics.

**APROBACION DE LA TESIS**

Vigilada mieducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
--------	--------------	---------	---	----------	------	--------	--------

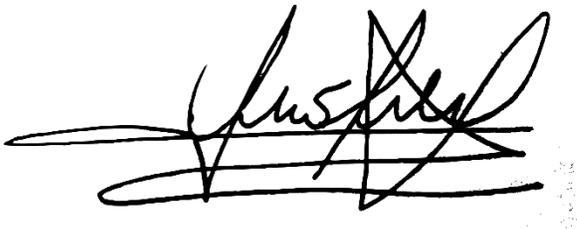
Nombre Presidente Jurado: Ana Lilia Bernal Esteban

Firma: 

Nombre Jurado: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: *Diego A. Rasero C*

Nombre Jurado: Francis Armando Segovia Chaves

Firma: 



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE FISICA

Sede Neiva

Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica

Jonathan Tapia Garzón

Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica

Jonathan Tapia Garzón, ✉ [u20121109710@usco.edu.co](mailto:u20121109710@usco.edu.co)

Trabajo de Grado presentado Para optar al título de Físico

Asesor: Hernando González Sierra, Doctor (PhD) en Física



UNIVERSIDAD  
**SURCOLOMBIANA**

Universidad Surcolombiana

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Física

Neiva - Colombia

2019

**Nota de aceptación:**

**Aprobado por el Comité de Grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad Surcolombiana para optar al título de Físico**

**Magister: Francis Armando Segovia Chaves**

---

**Jurado**

**Magister: Diego Alejandro Rasero Causil**

---

**Jurado**

**Neiva, Abril de 2019**

## **Dedicatoria**

Dedico este trabajo de grado a mis padres, abuelos, novia, tías, demás familia, amigos y profesores que me brindaron su apoyo durante esta carrera profesional, que sin su ayuda no sería posible este gran logro.

## **Agradecimientos**

Gracias a Dios por la vida y por la oportunidad de realizar esta carrera profesional como Físico, tan importante para mi formación como persona y profesional. A mis padres Mónica Garzón Campos y Fael Tapia Peralta que con su ayuda y amor siempre han creído en mí, han sido en todos estos años un apoyo incondicional y me ha mostrado el camino para seguir adelante en la vida y quienes me han orientado en este proceso de investigación

Agradezco a mi Abuela Carmenza Campos por brindarme su apoyo y sus oraciones para continuar iluminando mi camino, a mi novia Andrea Marcela Caviedes Gil por enseñarme a nunca darme por vencido y apoyarme siempre en todo lo que hice, a mis tías Dalys Garzón Campos y Ángela Del Pilar Garzón por sus buenos consejos que me motivaban a continuar para de salir adelante en la vida, también quiero agradecerle al docente PhD. Hernando González Sierra por sus clases y dedicación en el transcurso de este trabajo de grado. Y a los demás docentes del Programa de Física por su labor realizada a mi formación como profesional

Darle gracias a toda mi familia y amigos que dieron su grano de arena en la contribución a este trabajo de grado

Gracias a la Universidad Surcolombiana por darme la oportunidad de realizar mis estudios y a través de la vicerrectoría de investigación y proyección social quienes aprobaron el proyecto número 2334.

## Tabla de contenido

1	Introducción .....	10
2	Planteamiento del problema .....	14
2.1	Sistematización del Problema .....	15
2.2	Enunciación del Problema.....	16
3	Antecedentes .....	16
4	Justificación.....	20
5	Marco Teórico .....	22
5.1	Radiación Del Cuerpo Negro .....	22
5.2	Espectro de Planck con Física Clásica y Energía de Punto Cero.....	24
6	Objetivos .....	31
6.1	Objetivo general .....	31
6.2	Objetivos específicos.....	31
7.	Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica .....	32
7.1	Evidencias de Discretización de la Energía Electromagnética en el Contexto de la Mecánica Clásica.....	32
7.2	Ley de Radiación de Rayleigh-Jeans asociado a los modos .....	41
7.3	Espectro de Planck Relativista para la Radiación de Campo Escalar, la Radiación de Punto Cero Clásica y Parámetro de Escala.....	46
8	Análisis, Discusión de Resultados y conclusiones.....	51
8.1	El parámetro de escala y su Relación con sistemas físicos Radiantes .....	52
8.2	Análisis de Tablas .....	53
8.3	Conclusiones .....	55
	Apendice.....	55
	Referencias .....	59

## **Lista de tablas**

Tabla 1: Determinación de los valores medios de la dimensión lineal L en la ecuación (139) .....54

Tabla 2: Determinación de los valores medios de la dimensión lineal L de la ecuación (140) .....54

## Tabla de Figuras

Figura 1: Niveles de energía del Oscilador Armónico.....	13
Figura 2: Ley de Radiación de Rayleigh-Jeans.....	42

## Resumen

En este trabajo se elabora una aproximación que muestra como los límites entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica pueden estar muy cercanos entre sí, en oposición a los criterios de autores que aducen lo contrario [1,2]. Dado que es muy común encontrar que la física clásica no puede interpretar fenómenos a escalas microscópicas, debido a que los conceptos, postulados y el aparato matemático de la Mecánica cuántica no es susceptible de relacionarse completamente, y de manera generalizada, a partir de las formulaciones adecuadas de la mecánica clásica.

La aproximación consiste en la elaboración de un esquema basado en la electrodinámica clásica, incluida la teoría de la relatividad especial, para el caso de la radiación libre atrapada en un volumen de dimensiones finitas, la cual permite evaluar la densidad de la energía electromagnética almacenada en ese recinto. La aplicación de la Electrodinámica clásica, las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético dentro del volumen, conduce inicialmente a una expresión para la energía electromagnética.

El estudio cuantitativo y cualitativo de esta contribución difiere de las elaboraciones recientes [3], sobre la explicación clásica del espectro de radiación emitido por los cuerpos calientes, en que determinamos el factor de escala para estos procesos en términos de parámetros geométricos de la cavidad y de la permitividad del espacio libre. Un aspecto a destacar sobre este factor de escala, es que el valor teórico que hemos predicho es del orden de la constante de Planck; en este sentido, la última circunstancia coincide con la apreciación de algunos autores de que la misma constante de Planck es un factor de escala y no es una constante fundamental de la Física [4]

**Palabras clave:** Límites clásicos y cuánticos, Radiación Libre, Electrodinámica clásica, Factor de Escala, Densidad de Energía Electromagnética, Constante de Planck, Cavidad Finita.

## Abstract

This paper develops an approach that shows how the limits between classical mechanics and quantum mechanics can be very close to each other, in opposition to the criteria of authors that adduce the opposite [1,2]. Since it is very common to find that classical physics cannot interpret phenomena at microscopic scales, due to the concepts, principles and mathematical apparatus of quantum mechanics is not likely to engage fully, and generally, from suitable formulations of classical mechanics.

The approach consists in the development of a scheme based on the classical electrodynamics, including the theory of special relativity, for the case of free radiation trapped in a volume of finite dimensions, which allows to evaluate the density of the electromagnetic energy stored in that enclosure. The application of classical electrodynamics, Maxwell's equations for the electric and magnetic fields within the volume, initially leads to an expression for the electromagnetic energy.

The quantitative and qualitative study of this contribution differs from recent elaborations [3], on the classic explanation of the radiation spectrum emitted by hot bodies, in which we determine the scale factor for these processes in terms of geometrical parameters of the cavity and the permittivity of the free space. An aspect to highlighted on this scale factor, is that the theoretical value we have predicted is the order of the Planck's constant; in this sense, the last circumstance coincides with the appreciation of some authors that the same Planck's constant is a scale factor and is not a fundamental constant of Physics [4].

Keywords: classical and quantum limits, Free Radiation, Classical Electrodynamics, scale factor, electromagnetic energy density, Planck's constant, finite cavity.

## 1 Introducción

A principios del siglo XX, con el advenimiento de la Física Moderna [5] se postuló la cuantización de la energía electromagnética, pero no fue reconocida hasta la formulación de la Teoría de Dirac en 1928 cuando se sugirió que el campo electromagnético puede ser cuantizado [6], tratando las variables canónicas [7] como operadores que obedecen relaciones de conmutación implementadas a partir del principio de correspondencia. Con estos descubrimientos surgen las diferentes analogías en las cuales se muestran como los límites entre el mundo cuántico y clásico [8] están más cercanos de lo que parece. Prueba de ello en [9] la constante de Planck se describe desde un enfoque moderno como una constante ausente, o como la denomina el autor en su investigación esta constante es inobservable, excepto como un parámetro de la convención humana. A pesar de la larga referencia al experimento, la revisión muestra que la constante de Planck no puede obtenerse a partir de los datos de Ryberg, Davisson y Germer, Compton, o la utilizada por el mismo Planck.

En el nuevo enfoque, la constante de Planck está vinculada a las convenciones macroscópicas de origen newtoniano, que son prescindibles. La precisión de otras constantes fundamentales se mejora sustancialmente al eliminar la constante de Planck. La masa de los electrones se determina con más precisión al igual que la carga eléctrica. La mejora en el valor experimental de la constante de estructura fina permite que se comparen nuevos tipos de experimentos para encontrar “nueva física”.

Por otro lado en la referencia [10] los autores hacen un análisis del problema del cuerpo negro, realizando una expansión en serie del campo electromagnético en términos de modos TE, TM en una cavidad metálica con pequeñas pérdidas, que lleva al desarrollo de los campos electromagnéticos en un conjunto completo de funciones ortonormales. La expansión realizada está basada en la teoría de acople fuerte, manteniendo el espacio y el tiempo juntos, lo que les permite modelar la evolución del cuerpo negro hacia el equilibrio térmico. Alcanzar el equilibrio térmico con un análisis de guía de ondas multimodal tiene en cuenta el acoplamiento entre modos, además de la absorción y la emisión de radiación. Las propiedades de los modos, como el

ensanchamiento espectral, las pérdidas y la vida media, se vuelven progresivamente independientes de la frecuencia y ello explica cómo es posible el equilibrio en cavidades metálicas de conductores.

De acuerdo con lo expresado por los autores en las referencias compiladas hasta acá, es posible expresar que los límites entre la física clásica y la cuántica está más cercanos de lo que parece y lo que se pudo vislumbrar con esta indagación, es que podemos evaluar la constante de escala en la radiación del cuerpo a partir de la Electrodinámica Clásica, sin adicionar condiciones de cuantización de la energía y, sin tomar en cuenta los valores de la constante de escala dados por los estudios experimentales de las fuerzas de Casimir.

Inicialmente para verificar la idea de “discretización” clásica para la densidad de energía se considera el campo electromagnético dentro de una cavidad finita, sin materia en su interior, usando las ecuaciones de Maxwell. Los campos eléctrico y magnético se pueden asociar a través de la relación,  $B^2 = \epsilon_0 \mu_0 E^2$  [11] la cual simplifica la forma de la densidad de energía en términos de un solo campo y considerando soluciones de onda plana que muestran consistencia con las ecuaciones de Maxwell y forman un conjunto infinito de amplitudes con coordenadas y momentos generalizados. De manera similar Dirac obtuvo la cuantización de la energía, “cuantizando” los campos eléctricos y magnéticos, en el problema del oscilador armónico, transformando las coordenadas y momentos generalizados descritos previamente y demostrando que la energía de los campos electromagnéticos satisface los desarrollos de la mecánica cuántica.

Es importante volver a recalcar que nuestro estudio está basado solo en la Electrodinámica Clásica, incluyendo la Teoría Especial de la Relatividad que no había sido aún desarrollada cuando elaboraron los trabajos pioneros de Rayleigh-Jeans y de Planck sobre la emisión de la radiación por los cuerpos calientes.

Un punto de congruencia en la primera parte de este estudio, a manera de referente, es que destacamos la importancia de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en términos de los armónicos esféricos, ya que por ejemplo su análisis en otros contextos ligeramente diferentes muestra su preponderancia en [12] donde los armónicos esféricos están relacionados con las anisotropías del fondo cósmico, perspectiva que se expresa en la siguiente ecuación

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{nm} a_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

Donde  $T$  es la temperatura, los términos  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  corresponden a los armónicos esféricos y los  $a_{nm}$  se denominan como multipolos de las anisotropías de la RFC (Radiación del fondo cósmico), que tienen como objetivo determinar cuál es el espectro de potencias que se genera en la RFC. Además, de la anterior ecuación, si se expanden los términos de  $Y_{nm}$  se encuentra que existe monopolo ( $n = 0$ ) correspondiente a la temperatura de cuerpo negro de la RFC (Radiación cósmica de fondo). El dipolo ( $n = 1$ ) se interpreta como el resultado del efecto Doppler relativista causado por el movimiento relativo entre el sistema solar y el campo de radiación del cuerpo negro de la RFC. Los múltiplos  $n \geq 2$  representan la anisotropía intrínseca de la RFC.

En este estudio determinamos inicialmente una expresión de la energía electromagnética contenida en un volumen finito sin adicionar condiciones de cuantización, en contraparte a la expresión de la mecánica cuántica, para el caso del oscilador armónico cuántico, en cuyo último caso el valor del número cuántico  $n$  indica que la energía está distribuida por niveles como se muestra en la figura 1 [13]; sin embargo, a través de un modelo clásico es posible poder explicarlo con otro tipo de parámetros y procedimientos. Teniendo en cuenta lo anterior también se indaga que existen indicios de cuantización con un método diferente al planteado por la óptica cuántica; en este caso, usamos procedimientos de la física-matemática, como soluciones a las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, soluciones a las ecuaciones de Helmholtz y Bessel, los armónicos esféricos, mostrando que los límites entre la física clásica y la cuántica están muy cercanos entre sí.

Además a este trabajo se incorpora en la ley de radiación de Planck, derivado de la electrodinámica clásica relativista y con energía de radiación del punto cero, un parámetro de escala que se asocia con características geométricas y electromagnéticas de la radiación contenidos en una caja finita de volumen  $V$ . Este parámetro de escala está asociado a mediciones experimentales de las fuerzas de Casimir, de tal manera que la estructura de la ley de Planck

difiere de la que generalmente se presenta en la literatura en términos de la constante reducida de Planck  $\hbar$ .

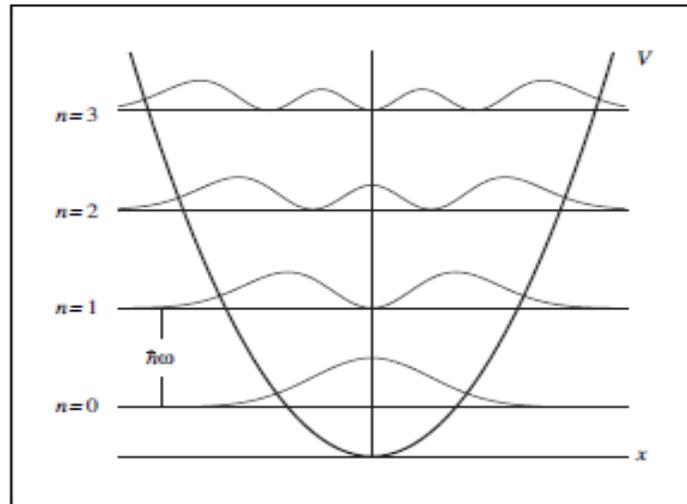


Figura 1: Niveles de energía del Oscilador Armónico

Nota Fuente: De La Peña, L. (2006). *Introducción a la Mecánica Cuántica*. (p 339).

El informe de este trabajo se organizó de la siguiente manera, en la sección 2 se da a conocer el planteamiento del problema con su evolución desde el siglo anterior a nuestra época actual, además del enunciado del problema. Seguidamente en la sección 3 se muestran los antecedentes que más influyeron en el estudio que fueron realizados por diferentes autores. En la sección 4, 5 y 6 se muestra la justificación, los objetivos propuestos y el marco teórico respectivamente.

La sección 7 contiene la parte central de nuestro trabajo, En la primera parte se presenta una síntesis de Rayleigh-Jeans y espectros de radiación de Planck. La segunda parte contiene la radiación termodinámica de modo normal y una derivación del espectro de Planck usando la física clásica que se incluye en la radiación clásica de punto cero. En la tercera parte, se presenta el desarrollo más importante de este trabajo, el cual contiene una nueva versión del espectro de radiación térmica de Planck que implica la radiación clásica de punto cero, y la inclusión del parámetro de escala. En la cuarta sección se ilustra algunos ejemplos específicos de sistemas físicos a los que se aplica la ley de radiación de Planck obtenida y se determina el valor del parámetro de escala para cada uno de ellos.

Presentamos también, en la sección 8, una evaluación del parámetro de escala para diferentes sistemas radiantes modelados como cuerpo negro, tomando valores experimentales típicos de los campos eléctrico y magnéticos generados en la cercanía de estos radiadores [14, 15]. En la parte final del capítulo presentamos un análisis de los resultados y las conclusiones.

## **2 Planteamiento del problema**

Es conocido que la Mecánica Clásica muestra falencias, evidenciadas por pruebas experimentales, en aquellas circunstancias en donde prevalece la Mecánica Cuántica. La Mecánica clásica es determinista y se fundamenta en leyes y principios fundamentados en que es posible encontrar las cantidades dinámicas con toda la precisión en cualquier instante; opuestamente, la Mecánica Cuántica se basa en postulados consistentes con la naturaleza indeterminista impuesta por el ineludible principio de incertidumbre de Heisenberg [16].

Desde la perspectiva del aparato matemático de la Mecánica Cuántica plagado de operadores y de funciones de onda, que son instrumentos de medición y cálculos de probabilidades [17], no se vislumbra un acercamiento con la Mecánica Clásica dado que esta última, en la formulación Newtoniana, opera con cantidades dinámicas que obedecen reglas sencillas basadas en el cálculo diferencial e integral.

Existe el denominado principio de correspondencia, y el teorema de Ehrenfest, que proporcionan una región límite entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica [18], pero no tiene la propiedad de ser universal en su aplicación dado que son muy pocos los sistemas a los que se le puede aplicar esta correspondencia. Por ejemplo, en la Teoría de Dirac planteada en 1928 se sugiere que el campo electromagnético puede ser cuantizado, tratando las variables canónicas clásicas como operadores que obedecen relaciones de conmutación [19] implementadas a partir del principio de correspondencia [20].

Primeramente se considera el campo electromagnético dentro de una cavidad finita, atrapada como radiación, sin materia en su interior, y haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell se evalúa la energía del campo electromagnético en el interior de la cavidad. Los campos eléctrico y

magnético pueden reinterpretarse a partir del potencial escalar y vectorial, una simplificación se puede lograr al considerar solo el potencial vectorial para soluciones de ondas planas que muestran consistencia con las ecuaciones de Maxwell y forman un conjunto infinito de amplitudes con coordenadas y momentos generalizados [21].

Aunque se tengan diferencias entre las formulaciones de la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica, en cuanto a los aparatos matemáticos y condiciones de validez, a nivel general deberá existir una región de confluencia en donde los fenómenos macroscópicos y microscópicos coincidan de tal forma que las dos teorías operan exitosamente de manera distinta. Vamos a desarrollar nuestra aproximación con la esperanza de que esos límites no se encuentren tan lejanamente separados y que se pueda vislumbrar una región más accesible; bajo estas premisas, queremos mostrar que en el caso de un tratamiento clásico del campo de radiación se pueden evidenciar vestigios de cuantización sin recurrir a la hipótesis de Planck [22].

La Electrodinámica Clásica, parte inherente de la Mecánica Clásica, tiene ingredientes especiales que nos permiten tomarla como referente para la elaboración de la aproximación: Primero, la naturaleza ondulatoria de la radiación predicha por Maxwell nos acerca más a la formulación ondulatoria de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y segundo su consistencia con la Teoría Especial de la Relatividad hace más plausible seguir ese camino. Por último, la simplificación de usar los potenciales escalar y vectorial, asociados a los campos eléctrico y magnético de la radiación libre, facilita el tratamiento matemático de la aproximación.

A partir del análisis anterior, se ha evidenciado la posibilidad de encontrar que la electrodinámica clásica puede contribuir en el desarrollo de importantes resultados de la mecánica cuántica.

## **2.1 Sistematización del Problema**

En esta parte del trabajo se muestran las opciones que se tuvieron en cuenta como pregunta de investigación, para posteriormente escoger una de estas.

¿Es posible describir la emisión de radiación por una cavidad finita, y sin materia, en términos de propiedades clásicas solamente?

¿Podemos usando solo la Teoría Electromagnética Clásica inferir indicios de discretización de esa energía radiada por el recinto finito?

¿Se pueden encontrar parámetros introducidos en la formulación del problema cuántico equivalente que muestren una conexión con la solución clásica de la electrodinámica clásica?

## 2.2 Enunciación del Problema

¿Es posible describir el espectro de la radiación emitida por una cavidad finita usando solamente la Electrodinámica Clásica?

## 3 Antecedentes

En general, las investigaciones en física teórica y en temáticas similares a este trabajo de grado son muy escasas en países como Colombia; por lo tanto, para la elaboración de este estudio hemos consultado artículos de investigación publicados en revistas internacionales las cuales se han referenciado a lo largo de este trabajo.

El autor en [23] propone que la ley de radiación de Planck puede ser explicada desde el espectro de radiación del cuerpo negro sin el formalismo de la teoría cuántica, además formula hipótesis muy importantes; en la primera introduce la existencia de la energía del punto cero para la radiación electromagnética fluctuante homogénea con un espectro invariante de Lorentz; en la segunda demuestra que la electrodinámica clásica es válida para un dipolo oscilante.

Meses más tarde el mismo autor [24], basado en la termodinámica estadística clásica en presencia de radiación electromagnética, reformula lo anteriormente planteado en su contribución. Describió los fenómenos clásicos de forma natural, que originalmente llevaron a la introducción de la idea de los cuantos. Para ello se debe cumplir la condición de que el gas ideal clásico tradicional no existe en principio para partículas de masa finita que tienen interacciones electromagnéticas, y por lo tanto, las pruebas clásicas de equipartición de energía son todas erróneas. Además, encontró que un tratamiento sistemáticamente clásico de la radiación térmica podría llevar a la introducción natural de la radiación fluctuante independiente de la temperatura en el universo, además, que el espectro de esta radiación electromagnética del punto cero se

puede obtener a partir de los argumentos a favor de la ley de desplazamiento de Wien o del requisito de la invariancia de Lorentz del espectro de radiación.

Los dos artículos anteriores, muestran las importantes relaciones que existen entre la electrodinámica clásica y la termodinámica, a partir de la invariancia de Lorentz y del espectro de radiación de temperatura cero, que se utiliza para derivar el espectro de la densidad de energía electromagnética del punto cero, encontrando que es lineal con la frecuencia,  $1/2 \hbar\omega$  por modo normal; además, hay que tener en cuenta que el parámetro encontrado por el autor lo asimila a la constante de Planck a partir de los resultados experimentales de las fuerzas de Casimir.

En el referencia [25] el autor presenta una nueva teoría denominada electrodinámica estocástica, que es una Electrodinámica Clásica que incluye las ecuaciones de Newton para el movimiento de partículas debido a la fuerza de Lorentz, y las ecuaciones de Maxwell para los campos electromagnéticos con partículas puntuales como fuentes. La teoría se aparta de la Electrodinámica de Lorentz, en que adopta una nueva condición límite en las ecuaciones de Maxwell. Con esto se refiere a una condición de frontera homogénea que implica radiación electromagnética clásica aleatoria con un espectro invariante de Lorentz, la radiación electromagnética clásica del punto cero. La escala del espectro de radiación aleatoria se establece mediante la constante  $\hbar$  de Planck. En el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , la teoría de la electrodinámica estocástica se convierte en la Electrodinámica de Lorentz.

Por lo tanto, la electrodinámica estocástica se encuentra entre dos teorías bien conocidas: la Electrodinámica Clásica con  $\hbar=0$ , por un lado, y la electrodinámica cuántica, con sus operadores y funciones de onda. El artículo analiza el papel de las condiciones límite en la electrodinámica clásica, la motivación para elegir una nueva condición límite que implique la radiación clásica del punto cero y el supuesto carácter aleatorio de la radiación. También se resumen las implicaciones de la teoría de la electrodinámica estocástica, incluida la detección de radiación de punto cero, el cálculo de las fuerzas de van der Waals y el cambio de ideas en la termodinámica estadística.

En esta contribución el nuevo análisis de los límites de validez de la teoría electrodinámica clásica, permite obtener datos importantes para comprender las diferencias y similitudes entre las

dos teorías mencionadas, además del papel fundamental en el que la constante de Planck puede influir en ambas y su importancia en la energía del punto cero.

En cuanto a la referencia [26] el trabajo se desarrolla desde el anterior artículo, ya que se calcula la dispersión de la radiación electromagnética clásica aleatoria, con un oscilador de dipolo eléctrico no relativista y no lineal puramente dentro de la física clásica, utilizando una expansión perturbativa de segundo orden en la constante de acoplamiento no lineal. Con ello muestra que el espectro de radiación de Rayleigh-Jeans es una distribución de equilibrio en presencia del oscilador no lineal, mientras que los espectros de radiación aleatorios dados por la ley de Planck o por la radiación de punto cero no son distribuciones de equilibrio, sino que están alterados por la dispersión del oscilador.

Como se ha enunciado en los anteriores artículos, y ahora en [27], una derivación estrechamente argumentada del espectro de Planck para la radiación del cuerpo negro se presenta dentro de la electrodinámica clásica con radiación electromagnética clásica de punto cero; de igual manera, este artículo muestra que la presencia de radiación clásica estocástica es independiente de la temperatura e invalida las ideas de la mecánica estadística clásica tradicional, que se vuelven válidas solo en el límite de baja frecuencia o alta temperatura, donde conducen a la ley de Rayleigh-Jeans para el espectro térmico.

El supuesto de la invariancia de Lorentz para la radiación del punto cero determina la parte de alta frecuencia del espectro de radiación aleatorio clásico. El problema del cuerpo negro de la física clásica con la radiación de punto cero clásicos como se considera aquí es la derivación de una fórmula de interpolación entre estos límites de alta y baja frecuencia. Aquí aprovechamos el sorprendente comportamiento diamagnético de una carga puntual clásica libre en la radiación del punto cero. Este comportamiento diamagnético se compara con el comportamiento paramagnético de un rotor de dipolo magnético de gran momento de inercia, que se deriva de la forma de baja frecuencia del espectro de radiación. Si uno requiere la condición natural simple de que el comportamiento diamagnético en función de la temperatura debe diferir solo en el signo del momento magnético del comportamiento paramagnético en función de la temperatura,

entonces uno se dirige exclusivamente al espectro de Planck, incluida la radiación de punto cero, como el espectro de equilibrio para la radiación aleatoria clásica.

En [28] las funciones de correlación de dos puntos de los campos de radiación electromagnéticos clásicos del punto cero se evalúan en notación de cuadrivector. Las expresiones covariantes de Lorentz manifiestan su invariante bajo las reglas de transcripción y bajo las transformaciones conformes de Bateman y Cunningham [29]. Como previo al trabajo electromagnético, se obtienen resultados análogos para un campo clásico escalar estocástico gaussiano con un espectro invariante de Lorentz.

Para [30] el autor presenta un análisis termodinámico del oscilador armónico. La motivación es proporcionada por el espectro de radiación del cuerpo negro, porque los modos de radiación toman la forma del oscilador armónico. Además, el comportamiento de un oscilador armónico térmico en un cambio cuasi estático de la frecuencia  $\omega$  muestra que las funciones termodinámicas pueden derivarse de una sola función de  $\omega/T$ , análoga al teorema de desplazamiento de Wien. Los límites de alta y baja frecuencia producen formas asintóticas que involucran solo la temperatura  $T$  o solo la frecuencia  $\omega$ , correspondientes a la equipartición de energía y a la energía del punto cero respectivamente, sugiriendo una interpolación natural entre las formas limitantes. El espectro de Planck con energía del punto cero corresponde a la función que satisface el resultado del desplazamiento de Wien, que proporciona la interpolación más baja posible entre la equipartición de energía a baja frecuencia y la energía de punto cero a alta frecuencia.

Por otro lado los artículos [31] y [32] se complementan, ya que, muestran como los límites de la física clásica y cuántica históricamente han generado debates entre algunos físicos importantes, en este caso Paul Dirac y Werner Heisenberg sobre la naturaleza de estas ramas de la física; además, es bien sabido que Niels Bohr insistió en la necesidad de los conceptos clásicos a partir de fenómenos cuánticos.

Las contribuciones de Rayleigh-Jeans [33, 34] y Planck [35] para elucidar la naturaleza de la radiación emitida por los cuerpos calientes se elaboró antes del año 1900, un tiempo en el que la teoría de la relatividad no había sido formulada; [36] lo anterior indica que esta ley de radiación clásica, y su versión cuántica en términos de la constante de Planck, no contiene explícitamente la

geometría del espacio-tiempo de la teoría especial de la relatividad [37]. La energía del punto cero para la radiación se incluye en la teoría del campo cuántico [38, 39, 40, 41, 42] sin embargo, esta energía de punto cero también surge en la electrodinámica clásica relativista y es determinante en dar una explicación de las fuerzas de Casimir, las fuerzas de van der Waals, los calores específicos y otras explicaciones de los fenómenos aparentemente perteneciente a la mecánica cuántica [43, 44, 45]. Hay derivaciones del espectro de radiación térmica que conducen a la ley de Planck, con energía de punto cero clásicos, y que no tienen en cuenta los supuestos de cuantificación de la energía. Lo anterior indicaría que la radiación emitida por los cuerpos calientes se produce en un contexto clásico, pero con la incorporación de la teoría de la relatividad en la formulación de la electrodinámica clásica y la teoría de campos clásicos relativistas. En referencia a la constante de Planck la comunidad científica, descarta su uso como una constante universal y puede aparecer en varios contextos [46, 47, 48, 49].

## 4 Justificación

Hacia finales del siglo XIX los fenómenos naturales podían describirse mediante las leyes de Newton, los principios de la termodinámica y las leyes del electromagnetismo, que mostraban la descripción de un universo basado en los principios clásicos. Este panorama cambiaría a inicios del siglo XX con el advenimiento de la física moderna, la teoría de la relatividad especial y la física cuántica, ya que, el estudio del movimiento de las partículas a velocidades comparables a la de la luz y las investigaciones del mundo microscópico de los átomos, electrones, protones y otras partículas impulsó al desarrollo de estos nuevos campos de la física.

En 1900 Max Planck, lanza su audaz idea de explicar el espectro del cuerpo negro suponiendo que los osciladores en las paredes de la cavidad emiten radiación en forma discreta, asociando una constante fundamental denominada “Constante de Planck” usada para calcular la energía en paquetes, más adelante establece que ésta energía se radia en unidades pequeñas llamadas cuantos y además relaciona que la energía de cada cuanto es igual a la frecuencia de la radiación multiplicada por la constante de Planck. A partir de lo anterior se fueron construyendo las bases teóricas de la física cuántica surgiendo importantes principios y postulados que posteriormente ayudarían a Dirac a construir una teoría mucho más sólida que las descritas en la física clásica.

A partir de lo anterior, los límites entre la física clásica y cuántica se han alejado cada vez más, en donde las leyes del electromagnetismo ahora difieren sustancialmente de los postulados de la mecánica cuántica, ya que satisfacen cualquier tipo de transformaciones respecto a los operadores escalera de la física cuántica; posteriormente también hay que tener en cuenta los nuevos parámetros que surgen a partir de estos operadores, que más adelante contribuyen a solución del problema cuántico para encontrar la energía del campo de radiación libre.

Con el éxito alcanzado por la hipótesis de Planck, para dar una interpretación del espectro emitido por los cuerpos calientes, se extendió su aplicación para dar cuenta de manera brillante de otros fenómenos que no eran explicados y entendidos por la Mecánica Clásica: El efecto fotoeléctrico, la producción de rayos X, el efecto Compton, producción y aniquilación de pares, los espectros atómicos, etc.

Pero si bien, estas extensiones han contribuido al desarrollo de la física, también es importante tener en cuenta lo que hace falta por descubrir, un ejemplo de ello es la posibilidad de que las leyes de la física clásica y cuántica puedan relacionarse en un mismo universo, es por ello que han surgido importantes analogías que describen algunos parámetros clásicos que pueden ser comparados con los encontrados en la mecánica cuántica, prueba de ello es la investigación propuesta por [50] basada en ideas clásicas del espectro de cuerpo negro de Planck y la radiación clásica del punto cero en relación con la termodinámica; en este estudio realiza dos derivaciones; la primera describe la existencia de un potencial canónico como una función monótona, al igual que su derivada; además demuestra que a bajas temperaturas puede existir una energía de punto cero y a altas temperaturas hay equipartición de la energía. La segunda derivación del espectro de Planck se basa en el requisito de que el cambio en la energía libre de Helmholtz de la radiación en una caja particionada mantenida a temperatura constante debe ser mínima. Finalmente, el autor muestra una modificación en la energía de Casimir, respecto al cambio de la posición de partición con la caja, que corresponde a la ausencia de energía del punto cero a una temperatura alta cuando se elige la energía espectral por modo normal. En el espectro tradicional de Planck, se omite la Energía del punto cero a baja temperatura; por lo tanto, la idea de energía del punto cero no está incluida en el espectro tradicional de Planck. Se enfatiza que la

radiación térmica está íntimamente conectada con la radiación del punto cero y la estructura del espacio-tiempo en la física clásica.

Se espera contribuir con esta investigación con ideas que puedan desarrollar conocimiento nuevo en física teórica y experimental, teniendo en cuenta que son muy pocos los estudios que se han propuesto en temas relacionados con este tema. Aunque como demuestran estudios previos, corroborados por esta investigación, que el problema de la emisión de la radiación de los cuerpos calientes se puede explicar en un contexto clásico este cuerpo de conocimientos no han sido incorporados en los textos de Física y muchos de los docentes de los cursos de Física siguen ilustrando estos temas en base al postulado de cuantización de la energía de Planck [22].

## 5 Marco Teórico

### 5.1 Radiación Del Cuerpo Negro

Un cuerpo negro absorbe y emite radiación perfectamente, es decir no existe ningún rango de frecuencias dominante. Por lo tanto, la intensidad de la radiación emitida está relacionada con la cantidad de energía en el cuerpo en el equilibrio térmico. La historia del desarrollo de la teoría de la radiación del cuerpo negro es muy interesante debido a que ella dio origen al descubrimiento de la teoría cuántica [51].

Los primeros estudios experimentales establecieron que la emisividad de un cuerpo negro es una función de la frecuencia y la temperatura. Una medida de la emisividad puede ser la cantidad  $\rho(\nu, T)$  que es la densidad de energía radiada por unidad de volumen y por unidad de frecuencia a una temperatura absoluta  $T$  y a una frecuencia  $\nu$ . Los primeros estudios teóricos hicieron uso de las ecuaciones de Maxwell para el cálculo de los modos electromagnéticos y para la determinación de la densidad de los modos electromagnéticos de  $\rho(\nu, T)$ . Por ejemplo, Wilhelm Wien en 1896 uso un modelo simple para deducir que

$$\rho(\nu, T) = \alpha \nu^3 \exp(-\beta \nu^3) \quad (1)$$

Donde  $\alpha, \beta$  eran constantes. Sin embargo, la ecuación anterior falla en el rango de las bajas frecuencias de los datos experimentales. En 1900 Lord Rayleigh publicó un modelo basado en los modos de las ondas electromagnéticas de una cavidad. Cada modo tenía una frecuencia particular. Cada modo tiene una frecuencia particular y puede dar o recibir energía de una manera continua. Usando la teoría electromagnética estándar de una cavidad resonante, con paredes perfectamente conductoras la siguiente relación de dispersión puede ser obtenida [52]:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \quad (2)$$

Donde  $a, b, y d$  son las dimensiones del resonador de la cavidad en las direcciones  $x, y, y z$ .

Si por simplicidad se supone que la cavidad es un cubo,  $a = b = d$  entonces la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$m^2 + p^2 + q^2 = \left(\frac{2\nu na}{c}\right)^2 \quad (3)$$

Donde  $m, p, q$  son enteros positivos.

Para computar el número de modos a la frecuencia  $\nu$  es necesario evaluar los que están en un octavo de esfera. El número de modos electromagnéticos  $N(\nu)$  pueden ser determinados como

$$N(\nu) = \frac{\frac{1}{8} \text{ volumen de la cavidad esferica}}{\text{volumen de un modo}} = \frac{\frac{1}{8} \left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(\frac{2\nu na}{c}\right)^3}{1 \times 1 \times 1} = \frac{4}{3} \left(\frac{\nu na}{c}\right)^3 \pi \quad (4)$$

Debido al grado de degeneración de los modos TE y TM el anterior número debe ser multiplicado por 2. De esta manera, el número total de modos electromagnéticos por volumen se encuentra derivando el número de modos respecto a la frecuencia

$$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (5)$$

Rayleigh asignó una energía  $k_B T/2$  a cada modo electromagnético, y  $k_B T/2$  para la oscilación del campo eléctrico, donde  $k_B = 1.38066 \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann. De esta forma, la densidad de energía electromagnética por frecuencia  $\rho(\nu, T)$  se convierte en:

$$\rho(\nu, T) = \frac{dN(\nu)}{d\nu} k_B T \quad (6)$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (7)$$

La ecuación (7) es conocida como la distribución de Rayleigh-Jeans de la radiación del cuerpo negro y falla dramáticamente en la parte ultravioleta del espectro (históricamente denominada como “la catástrofe ultravioleta”).

En su trabajo de 1900 Planck tomó en cuenta algunos datos experimentales de Heinrich Rubens y Ferdinand Kurlbaum, como también la fórmula de Wien y dedujo una expresión que explicaba todos los datos experimentales disponibles. Su ecuación hoy es conocida como la ley de radiación del cuerpo negro y está dada por

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 n^3}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1} \quad (8)$$

Donde  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  es conocida como la constante de Planck. La ecuación (8) se reduce a la fórmula de Wien para altas frecuencias ( $h\nu/k_B T \gg 1$ ) y a la fórmula de Rayleigh-Jeans para bajas frecuencias ( $h\nu/k_B T \ll 1$ ).

Una vez obtenida su ecuación, Planck se preocupó por sus bases físicas. Era difícil argumentar acerca de la determinación de la densidad de modos electromagnéticos. De esta forma., él se concentró en la energía promedio por modo electromagnético. Para esto, Planck realizó la hipótesis de que la energía electromagnética a la frecuencia  $\nu$  solo podría aparecer como un múltiplo de  $h$ , lo cual era un cuanto de energía (que después llamó fotón).

## 5.2 Espectro de Planck con Física Clásica y Energía de Punto Cero

Las derivaciones del espectro de Planck incluyendo la energía del punto cero son variadas, en esta sección se presenta algunas de estas deducciones, destacando los más relevantes aspectos físicos y los procedimientos matemáticos usados.

Estas derivaciones del espectro del cuerpo negro de Planck son dadas en el contexto de la Mecánica Clásica e incluyen la energía clásica de la radiación del punto cero y también ideas de la Termodinámica. La Termodinámica incluye la primera y la segunda ley, el potencial Termodinámico, la energía libre de Helmholtz y el teorema de Wien. En el contexto de las matemáticas, la teoría clásica escalar relativista, los marcos acelerados de Rindler y el comportamiento monótono de las funciones termodinámicas son usados [24, 25, 28, 30, 3]. De estas referencias bibliográficas presentamos una síntesis de algunas derivaciones del espectro de radiación del cuerpo negro en la Física Clásica

La primera derivación del espectro de Planck está basada en la idea de que el potencial canónico  $\phi(\omega/T)$  es una función monótona [50], y todas sus derivadas también son monótonas, cuando interpolamos entre la energía del punto cero, a baja temperatura, y la energía de equipartición a alta temperatura; el comportamiento monótono excluye proporcionar un valor preferencial a la razón  $\omega/T$ . Considerando la termodinámica del oscilador armónico simple, el cual solo tiene las variables  $T$  y  $\omega$ , y toma una forma particularmente simple [39]. En el equilibrio con un baño térmico, la energía media del oscilador  $U = \langle \mathcal{E} \rangle$  es consistente con la primera ley de la Termodinámica  $dQ = dU + dW$  con la entropía satisfaciendo la ecuación  $dS = dQ/T$ . Aplicando las leyes de la Termodinámica al oscilador armónico se obtiene el teorema de Wien.

$$U = \omega f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (9)$$

Siendo  $f\left(\frac{\omega}{T}\right)$  una función a determinar. La segunda ley de la Termodinámica proporciona una conexión entre  $\phi(\omega/T)$  y la energía libre de Helmholtz,  $F(\omega, T)$ , se infiere que

$$F(\omega, T) = -T\phi'\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (10)$$

La energía promedio del oscilador es:

$$U(T, \omega) = -\omega\phi'\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (11)$$

$\phi'(\omega/T)$  Es la derivada de  $\phi(\omega/T)$  con respecto a  $z = \omega/T$ , cuando  $T$  es muy grande la razón  $\omega/T$  es pequeña, la energía promedio  $U$  del oscilador armónico en la ecuación (9) viene a ser independiente de  $\omega$  proporcionado a

$$\phi'(\omega/T) \rightarrow -const_1 \times (\omega/T)^{-1}$$

Así que

$$U = k_B T \quad \frac{\omega}{T} \ll 1 \quad (12)$$

Con esta condición la radiación térmica da el límite de Rayleigh-Jeans para alta temperatura o baja frecuencia.

En el límite a baja temperatura donde la razón  $\omega/T$  es grande, la dependencia en la temperatura es eliminada, así que

$$U = const_2 \times \omega \quad \frac{\omega}{T} \gg 1 \quad (13)$$

En este punto, cualquier descripción teórica de la radiación térmica implica una elección, que debe basarse en la observación experimental. Si elegimos que  $const_2 = 0$ ; a continuación, este límite no nos obliga a introducir cualquier constante más allá de la constante de Boltzmann, para el límite a alta temperatura de la radiación térmica. Por otro lado, si elegimos un valor distinto de cero para esta constante,  $const_2 \neq 0$  entonces estamos introduciendo una segunda constante en la teoría de la radiación térmica, que tiene dimensiones diferentes de la constante de Boltzmann. Las unidades de esta nueva constante corresponden a la energía por el tiempo. Además, la elección de un valor distinto de cero para esta constante significa que a temperatura  $T = 0$ , no es aleatoria, independiente de la temperatura de la energía presente en el oscilador armónico.

Si este oscilador armónico tiene interacciones electromagnéticas, debe estar en equilibrio con la radiación en el baño térmico, y radiación de punto cero, por lo tanto aleatorio debe estar presente en el sistema. Esta radiación aleatoria que existe a temperatura  $T = 0$  es la radiación electromagnética clásica de punto cero.

Ahora para tomar en cuenta experimentalmente la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas descargadas, será influida por la radiación electromagnética clásica de punto cero. La escala de la radiación clásica del punto cero debe ser tal que  $const_2 \cong \hbar/2$ , y para cada modo normal, la energía promedio es

$$U(\omega, 0) = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (14)$$

Cuando se trata de la termodinámica del oscilador armónico, es conveniente absorber la constante  $k_B$  de Boltzmann en la definición de temperatura y absorber la constante de Planck en la definición de frecuencia, por lo tanto, es conveniente escoger las constantes como  $k_B = 1$ ;  $\hbar = 1$ . En esta convención, las dos constantes se convierten en  $const_1 = 1$  y  $const_2 = 1/2$ . En la revisión termodinámica anterior, vemos que la termodinámica del oscilador armónico y, por lo tanto, del espectro de radiación del cuerpo negro está determinada por una función desconocida  $\phi(z)$  donde  $z = \omega/T$  y tiene los límites asintóticos para su derivada dada por

$$\phi'(z) \rightarrow -z^{-1} \quad z \rightarrow 0 \quad ; \quad \phi'(z) \rightarrow -1/2 \quad z \rightarrow \infty \quad (15)$$

Integrando

$$-\phi(z) \rightarrow \ln z \quad z \rightarrow 0 \quad ; \quad -\phi(z) \rightarrow z/2 \quad z \rightarrow \infty \quad (16)$$

En este punto se debe tener en cuenta que para encontrar el potencial adecuado, como mínimo, la noción de suavidad exige que cualquier función de interpolación  $\phi(\omega/T) = \phi(z)$  del potencial canónico del oscilador debe ser monótono al igual que sus derivadas, para ello se va a escoger de un conjunto de funciones hiperbólicas las cuales son monótonas, al igual que sus derivadas. En este caso la función  $\sinh(z/2)$  tiene los límites asintóticos. Donde se debe tener en cuenta la propiedad trigonométrica  $2\sinh(z) = e^z - e^{-z}$ ; en los límites anteriormente descritos en las ecuaciones, cuando  $z \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow \infty$  respectivamente.

$$\phi(z) = -\ln \left[ 2 \sinh \left( \frac{z}{2} \right) \right] \quad (17)$$

Donde la energía asociada  $U(\omega, 0)$ , tiene la siguiente forma:

$$U(\omega, T) = -\omega\phi'(z) = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{\exp(\omega/T) - 1} \quad (18)$$

Una segunda derivación del espectro de Planck usa un sistema de coordenadas acelerado [9], en el contexto de la teoría del campo escalar relativista la cual incluye la radiación clásica del punto cero. Esta teoría escalar clásica de campos es análoga a la teoría electromagnética clásica con radiación del punto cero.

La radiación en una caja puede ser descrita por un conjunto completo de ondas estacionarias con vectores de onda apropiados  $\vec{k}$ . Usando la teoría escalar estocástica de campos  $U_k$  por modo normal es

$$U_k = \frac{1}{8\pi} k^2 [f(ck)]^2 \quad (19)$$

Donde  $f(ck)$  es la función espectral. La función de correlación de una distribución general isotrópica de ondas escalares clásicas, para una caja larga los modos normales están cerradamente espaciados, es

$$\begin{aligned} &< \phi(ct, x, y, z)\phi(ct', x', y', z') > \\ &= \frac{1}{8\pi^2 c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \int_0^\infty d\omega \omega f^2(\omega) \left\{ \sin \left[ \left( \frac{\omega}{c} \right) (|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[ \left( \frac{\omega}{c} \right) (|\vec{r} - \vec{r}'| + c(t - t')) \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

La función de correlación para la energía del punto cero especificada por

$$U(\omega, 0) = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (21)$$

Puede ser determinada a partir de

$$< \phi_0(ct, x, y, z)\phi_0(ct', x', y', z') > = \frac{-\hbar c}{\pi [c^2(t - t')^2 - (x_i - x'_i)^2]} \quad (22)$$

$i=1, 2, 3$

Si  $x_i = x'_i$

$$\langle \phi_0(ct, x, y, z) \phi_0(ct', x, y', z) \rangle = \frac{-\hbar c}{\pi c^2 (t - t')^2} \quad (23)$$

Para  $t = 0$  la transformación de un sistema de coordenadas  $(c t, x, y, z)$  a un marco de Rindler  $(\eta, \zeta, y, z)$ , en reposo con respecto al sistema inercial, está dado por

$$ct = \zeta \sinh(\eta) \quad x = \zeta \cosh(\eta) \quad y = y \quad z = z \quad (24)$$

Las métricas en los dos sistemas de referencia están relacionados por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \zeta^2 d\eta^2 - dy^2 - dz^2 \quad (25)$$

De las ecuaciones de transformación

$$x^2 = (\zeta^2 + c^3 t^2)^{1/2} \quad (26)$$

Con aceleración en el marco de Rindler  $a = c^2/\zeta$  la cual cambia con la coordenada espacial  $\zeta$  resulta divergente en el “horizonte de sucesos”.

La evaluación de la función de dos puntos, en la energía del punto cero, en el marco de Rindler es

$$\langle \phi_{RO}(\eta, \zeta, y, z) \phi_{RO}(\eta', \zeta', y, z) \rangle = \frac{-\hbar c}{\pi [2\zeta\zeta' \cosh(\eta - \eta') - \zeta^2 - \zeta'^2 - (y - y')^2 - (z - z')^2]} \quad (27)$$

Donde algunos términos se anulan debido a que  $y = y'$  y  $z = z'$

Para el mismo punto, pero para dos tiempos diferentes, en el marco de Rindler la función de correlación es:

$$\langle \phi_{RO}(\eta, \zeta, y, z) \phi_{RO}(\eta', \zeta, y, z) \rangle = \frac{-\hbar c a^2}{\left[ 2c^2 \operatorname{senh} \left\{ \frac{(\tau_R - \tau_{R'}) a}{(2c)} \right\} \right]^2} \quad (28)$$

Por unicidad temporal en la función de correlación es necesario que la sustitución sea hecha para  $a \rightarrow a + \text{constante} \times T$  Para que las dimensiones de esta constante sean adecuadas, ella debe ser  $2\pi c k_B / \hbar$ , entonces la función de correlación en el espacio de Rindler es

$$\langle \phi_{RO}(\eta, \zeta, y, z) \phi_{RO}(\eta', \zeta, y, z) \rangle = \frac{-\hbar c (a + 2\pi c k_B T / \hbar)^2}{\left[ 2c^2 \operatorname{senh} \left\{ \frac{(\tau_R - \tau_{R'}) (a + 2\pi c k_B T / \hbar)}{(2c)} \right\} \right]^2} \quad (29)$$

En el límite cuando la aceleración de aproxima a cero, la temperatura permanece fija, y el tiempo propio en el marco de Rindler es igual al tiempo propio en el marco de Minkowsky, entonces las funciones de correlación coinciden

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \phi_{RT}(\eta, \zeta, y, z) \phi_{RT}(\eta', \zeta, y, z) \rangle = \langle \phi_T(ct, x, y, z) \phi_T(ct', x', y', z') \rangle \quad (30)$$

Del lado izquierdo de la ecuación (30) se obtiene la energía y en el lado derecho es necesario tomar la transformada de Fourier coseno en [52] y además del desarrollo matemático se deben tener en cuenta dos artículos importantes [3] y [62], de esta forma

$$U(\omega, T) = \frac{\omega^2 f^2}{8\pi c^2} = \frac{\hbar \omega}{2} \coth \left( \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) \quad (31)$$

$$U(\omega, T) = \frac{\hbar \omega}{\exp \left[ \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right] - 1} + \frac{\hbar \omega}{2} \quad (32)$$

Obteniéndose la ley de radiación de Planck con energía del punto cero.

## **6 Objetivos**

### **6.1 Objetivo general**

- Estudiar la emisión de la radiación de los cuerpos calientes usando exclusivamente la Mecánica Clásica y el cálculo teórico de la escala que determina el espectro de radiación emitido por un recinto finito.

### **6.2 Objetivos específicos**

- Evaluar energía de la radiación atrapada en un recinto finito usando la Electrodinámica Clásica de Maxwell,
- Evidenciar la existencia de indicios de “discretización” de la energía del campo de radiación en un volumen finito.
- Encontrar el espectro de emisión de radiación por una cavidad finita y determinar las características del parámetro de escala que da el espectro en términos de propiedades físicas y geométricas del recinto.
- Expresar el punto cero de energía en términos del parámetro de escala y evaluar el valor de este parámetro para compararlo con las mediciones experimentales de las fuerzas de Casimir.

## **7. Espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, energía del punto cero y parámetro de escala a partir de la Electrodinámica Clásica**

En este capítulo se presentan los desarrollos teóricos acerca de la obtención del espectro de radiación de Planck en el contexto de la Electrodinámica Clásica, incluyendo la teoría especial de la relatividad y la Teoría clásica de campos escalares, y que conforman la parte central del trabajo de grado.

En las secciones 7.1 y 7.2 se elabora una aproximación clásica para mostrar que los límites entre la Mecánica Clásica y la mecánica cuántica están bien cercanos entre sí. El sustento teórico se fundamenta en considerar una cavidad esférica finita de radio  $R$ , como el recinto que aloja la radiación electromagnética en su interior a manera de cuerpo negro, dada las características de la simetría esférica del radiador es posible determinar el valor medio de la energía en el marco de la Teoría Electromagnética y vislumbrar que se muestran indicios de discretización de esta energía a nivel clásico

En la sección 6.3 presentamos un esquema teórico para determinar el espectro de Planck de la radiación del cuerpo negro, con los agregados de explicitar este espectro en términos de la energía del punto cero y determinar el parámetro de escala, en términos de propiedades eléctrica o magnéticas del espacio libre y de la geometría de la cavidad radiante, haciendo uso de la Electrodinámica Clásica y sin adicionar condiciones de cuantización de la energía.

### **7.1 Evidencias de Discretización de la Energía Electromagnética en el Contexto de la Mecánica Clásica**

Para comenzar con el planteamiento es necesario encontrar la densidad de energía electromagnética en una cavidad radiante de dimensiones finitas. La electrodinámica clásica muestra que la energía en un recinto de volumen  $V$  es

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left[ \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right] dV \quad (33)$$

Ahora expresando la energía en términos del valor medio para una función de probabilidad o valor esperado para una distribución continua se tiene que:

$$E(r, t) = \langle H \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(r, t) \rangle d^3r \quad (34)$$

Donde la función puede ser descrita como la energía electromagnética de la ecuación (33).

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \langle E^2 \rangle dV + \frac{1}{2\mu_0} \int \langle B^2 \rangle dV \quad (35)$$

Asumiendo que los campo eléctricos y magnéticos se pueden tomar como ondas planas monocromáticas.

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (36)$$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (37)$$

En el espacio libre la divergencia del campo eléctrico, y magnético, son nulas haciendo que las amplitudes también lo sean:

$(E_0)_z = (B_0)_z = 0$ . Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación, por lo que su aplicación a la ley de Faraday conduce a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{k}(E_0)_y \quad (38)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega(B_0)_x \quad (39)$$

Igualando las ecuaciones (38) y (39):

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 \quad (40)$$

Donde

$$\frac{1}{c} = \frac{k}{\omega} \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (41)$$

Reemplazando en la ecuación (40)

$$B^2 = \epsilon_0 \mu_0 E^2 \quad (42)$$

De modo que la ecuación (35) puede expresarse solo en términos del campo eléctrico

$$\langle H \rangle = \epsilon_0 \int \langle |E(\vec{r}, t)|^2 \rangle dV \quad (43)$$

En relación con lo anterior es necesario reescribir el campo eléctrico como una sumatoria de modos evaluados sobre el conjunto de número de onda y estados de polarización  $k, s$ .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, s} E_{\vec{k}, s}(\vec{r}, t) e_{\vec{k}, s} \quad (44)$$

Donde  $\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \sum_s E_{\vec{k}, s}(\vec{r}, t) e_{\vec{k}, s}$

De las ecuaciones (43) y (44)

$$\langle H_s \rangle = \epsilon_0 \sum_{\vec{k}, s} \int \langle |E_{\vec{k}, s}(\vec{r}, t)|^2 \rangle dV \quad (45)$$

Pero para poder escribir la ecuación (45) es importante subrayar que este campo eléctrico satisface las ecuaciones de Maxwell. Aplicando rotacional a ambos lados de la ley de Faraday, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 E_{\vec{k}, s} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_{\vec{k}, s}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

Utilizando de nuevo las propiedades del campo eléctrico, como ondas planas monocromáticas, la ecuación diferencial queda expresada

$$\nabla^2 E_{\vec{k},s}(\vec{r}, t) - k^2 E_{\vec{k},s}(\vec{r}, t) = 0 \quad (47)$$

Observando la semejanza que tiene la expresión (40) con la ecuación de Helmholtz, podemos utilizar el método de separación de variables en coordenadas esféricas para obtener su solución.

Usando el método de separación de variable, y suponiendo un recinto de forma esférica que facilita la solución para el campo eléctrico, tenemos

$$E_{\vec{k},s}(r, \theta, \varphi, t) = R(r) \vartheta(\theta) \phi(\varphi) E_0(t) \quad (48)$$

Y el laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (49)$$

Simultáneamente se reemplazan las ecuaciones (48) y (49) en la ecuación (47). Los términos se separan y quedan descritos en la forma

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[ -k^2 - \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\vartheta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right] \quad (50)$$

Donde se cumple que:

$$\phi(\varphi) = R(r) \vartheta(\theta) = Cte \quad (51)$$

Entonces la ecuación (50) para  $\phi(\varphi)$  se reescribe:

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + m^2 = 0 \quad (52)$$

Y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$\phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (53)$$

Continuando con las partes radial y angular utilizando el mismo procedimiento se obtienen las ecuaciones que en la física matemática son conocidas como la ecuación de Bessel modificada para la parte radial y la ecuación asociada de Legendre para la parte angular, respectivamente:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \vartheta + \alpha \vartheta = 0 \quad (54)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{\alpha R}{r^2} = 0 \quad (55)$$

Es común que las ecuaciones (54) y (55) se puedan solucionar haciendo respectivos cambios de variable, utilizando la fórmula de Leibniz, expandiendo términos y aplicando el método de frobenius [53] para mostrar que sus respectivas soluciones dependen ahora de los polinomios de Legendre y funciones de Bessel.

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{l/2} \frac{(-1)^m (2l-2m)!}{2^l m! (l-2m)!} \frac{x^{l-2m}}{(l-m)!} \quad ; \quad \vartheta = P_l^m(x) \quad ; \quad x = \cos \theta \quad (56)$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \quad ; \quad x = kr \quad (57)$$

O también se puede mostrar como lo indican en [54]

$$J_n(kr) = \frac{\sin \left[ kr - \frac{n\pi}{2} \right]}{kr} \quad ; \quad kr \rightarrow \infty \quad (58)$$

Además las soluciones de las variables angulares  $\vartheta(\theta) \varphi(\varphi)$  pueden ser escritas en términos de los armónicos esféricos [55] y donde se cambia  $l = n$

$$\vartheta(\theta) \varphi(\varphi) = \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-n}^n P_l^m e^{im\varphi} \quad (59)$$

En donde estos términos son los previamente desarrollados en las ecuaciones (56) y (53). Entonces el campo eléctrico de la ecuación (48) ahora puede interpretarse como una interacción entre los armónicos esféricos, las funciones de Bessel y una dependencia temporal.

$$E_{k,s}(r, \theta, \varphi, t) = E_0(t)J_n(kr) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (60)$$

Partiendo de la ecuación (60) desarrollamos el procedimiento que muestra que la energía electromagnética es modificada de tal forma que pueda inferirse que contiene indicios de “discretización”. Aplicando la norma e integrando sobre el volumen del recinto esférico

$$\int |E_{k,s}(r, \theta, \varphi, t)|^2 dV = \int |E_0(t)|^2 |J_n(kr)|^2 \left| \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \right|^2 dV \quad (61)$$

La anterior expresión dependiente de los armónicos esféricos, puede expresarse a partir del llamado teorema de adición para armónicos esféricos; el cual relaciona los polinomios de Legendre y los armónicos.

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{*m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (62)$$

Donde  $\gamma$  es el ángulo formado entre dos vectores  $x$  y  $x'$  de coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$  y  $(r, \theta', \varphi')$ , respectivamente. Estas definiciones para  $x$  y  $x'$  también implican que

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (63)$$

$$\hat{r}' = \sin \theta' \cos \varphi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}$$

Aplicando el producto punto entre los dos vectores

$$(\cos \gamma) = \hat{r} \cdot \hat{r}' = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta' \quad (64)$$

Ahora es posible probar el teorema de la suma dado que,  $\cos \gamma$  es función de los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ , entonces es posible expandir el término  $P_n(\cos \gamma)$  en función de los armónicos esféricos  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  de la forma:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n C_m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (65)$$

Es evidente que la ecuación (64) es simétrica en  $(\theta, \varphi)$  y  $(\theta', \varphi')$  entonces el polinomio  $P_n(\cos \gamma)$  puede expandirse en términos de  $(\theta', \varphi')$

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n C_{m'} Y_n^{m'}(\theta', \varphi') \quad (66)$$

Combinando las ecuaciones (65) y (66) y haciendo  $\alpha_{mm'} = C_m C_{m'}$  se tiene que:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n}^n \alpha_{mm'} Y_n^{m'}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (67)$$

De la anterior ecuación aplicando la relación de simetría cambiando  $m' = -m$

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n \alpha_m Y_n^{-m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (68)$$

Y teniendo en cuenta la siguiente propiedad de los armónicos esféricos

$$Y_n^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_n^{*m}(\theta, \varphi) \quad (69)$$

Reemplazando (68) en (69) se obtiene:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m Y_n^{*m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (70)$$

Suponiendo que  $\gamma = 0 \rightarrow \cos(\gamma) = 1$  además para que esto se cumpla se debe tener en cuenta que en la ecuación (64)  $\theta = \theta'$  y  $\varphi = \varphi'$  por lo tanto la ecuación (69) se reescribe:

$$P_n(1) = 1 = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m \left| \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \right|^2 \quad (71)$$

Integrando ambos lados de la ecuación en todos los puntos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta d\varphi = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y_n^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi \quad (72)$$

Resolviendo las respectivas integrales se deduce que:

$$4\pi = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m \quad (73)$$

Ahora de la ecuación (70) multiplicando por el conjugado de  $P_n(\cos \gamma)$  en ambos lados de la ecuación

$$|P_n(\cos \gamma)|^2 = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m Y_n^{*m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \sum_{m'=-n}^n (-1)^{m'} \alpha_{m'} Y_n^{*m'}(\theta', \varphi') Y_n^{m'}(\theta, \varphi) \quad (74)$$

$$|P_n(\cos \gamma)|^2 = \sum_{m=-n}^n (-1)^m \alpha_m Y_n^{*m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) \sum_{m'=-n}^n (-1)^{m'} \alpha_{m'} Y_n^{*m'}(\theta, \varphi) Y_n^{m'}(\theta', \varphi') \quad (75)$$

Ahora aplicando la propiedad de la ecuación (69) y teniendo en cuenta la anterior transformación  $m' = -m$  e integrando en ambos lados de la ecuación con respecto a los ángulos  $\theta, \varphi$  la ecuación (75) se reduce a:

$$\int P_n^2(\cos \gamma) \, d\Omega = \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n}^n (-1)^{m+m'} \alpha_m \alpha_{m'} Y_n^{*m}(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta', \varphi') \int Y_n^{m'}(\theta, \varphi) Y_n^{*m}(\theta, \varphi) \, d\Omega \quad (76)$$

Luego aplicando la relación de ortonormalidad

$$\frac{4\pi}{2n+1} = \sum_{m=-n}^n \alpha_m^2 \left| \sum_{m'=-n}^n Y_n^m(\theta', \varphi') \right|^2 \quad (77)$$

Integrando de nuevo la ecuación (77)

$$4\pi \frac{4\pi}{2n+1} = \sum_{m=-n}^n \alpha_m^2 \quad (78)$$

Ahora reemplazamos la ecuación (73) en (78)

$$\alpha_m = \frac{4\pi (-1)^m}{2n + 1} \quad (79)$$

Además de reemplazar en la ecuación (71) para demostrar el teorema de adición para los armónicos esféricos se puede reemplazar en la ecuación (72) para calcular el valor de  $|\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi)|^2$  que aparece previamente en la ecuación (62).

$$1 = \frac{4\pi}{2n + 1} \sum_{m=-n}^n (-1)^{2m} \left| \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \right|^2 \quad (80)$$

Finalmente despejando los armónicos esféricos se tiene

$$\sum_{m=-n}^n |Y_n^m(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2n + 1}{4\pi} \quad (81)$$

Remplazando la ecuación (81) en la ecuación (61) y simplificando

$$\int |E_{k,s}(r, \theta, \varphi, t)|^2 dV = |E_0(t)|^2 (2n + 1) \int_0^R r^2 |J_n(kr)|^2 dr \quad (82)$$

La integral en la ecuación (82) puede resolverse explícitamente a partir de la ecuación (58). La solución es

$$\int_0^R r^2 |J_n(kr)|^2 dr = \frac{R}{2k^2} \quad ; \quad kr \rightarrow \infty \quad (83)$$

Donde  $k$  es el número de onda y  $R$  es el radio del recinto esférico.

Sustituyendo en la ecuación (82), luego multiplicando ambos lados por  $\varepsilon_0$  y aplicando el valor medio

$$\varepsilon_0 \int \langle |E_{k,s}(r, \theta, \varphi, t)|^2 \rangle dV = \varepsilon_0 \langle |E_0(t)|^2 \rangle (2n + 1) \frac{R}{2k^2} \quad (84)$$

Ahora podemos usar el hecho de que el valor medio de una función temporal puede escribirse

$$\langle |E_0(t)|^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{|E_0|^2}{2} \quad (85)$$

Entonces la ecuación (84) se reduce a

$$\varepsilon_0 \int \langle |E_{k,s}(r, \theta, \varphi, t)|^2 \rangle dV = \varepsilon_0 |E_0|^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{R}{2k^2} \quad (86)$$

El campo eléctrico se identifica como una distribución discreta de modos, así escribimos la sumatoria en ambos lados de la ecuación y seguidamente se sustituye en la ecuación (45) para obtener la función Hamiltoniana que corresponde a la densidad de energía electromagnética de la cavidad

$$\langle H \rangle = \frac{R}{2k^2} \varepsilon_0 |E_0|^2 \sum_{k,s} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (87)$$

$$\langle H \rangle = \frac{R}{2k^2} \varepsilon_0 |E_0|^2 \left( n_{k,s} + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad \sum_{k,s} \left( n + \frac{1}{2} \right) = \left( n_{k,s} + \frac{1}{2} \right) \quad (88)$$

En la ecuación (88) se observa cómo la energía electromagnética tiene una forma similar con la obtenida a partir de la solución cuántica del hamiltoniano en el oscilador armónico, pero aún falta la dependencia de la constante de Planck y la frecuencia para ser un poco más cercanos, para esto no es necesario elaborarlo porque se trata de una aproximación clásica.

## 7.2 Ley de Radiación de Rayleigh-Jeans asociado a los modos

Como se mencionó anteriormente, establecer los límites entre la física clásica y la cuántica presenta serias dificultades, pero se ha mostrado que en esta aproximación clásica, expresada mediante la ecuación (88), existe un indicio de “discretización” de la energía dado que ella incluye  $n_{k,s}$  que es un número entero. Todavía falta un paso para obtener la energía del campo electromagnético para una frecuencia angular específica (límite monocromático). Para ello es necesario contar los modos asociados con la condición elegida de una sola frecuencia utilizando

la técnica de Rayleigh-Jeans donde el resultado obtenido es muy satisfactorio. Además se asume que  $\omega_k = ck$ , entonces para encontrar los modos asociados al campo eléctrico se utiliza la ecuación (47) en 3 dimensiones y en coordenadas cartesianas.

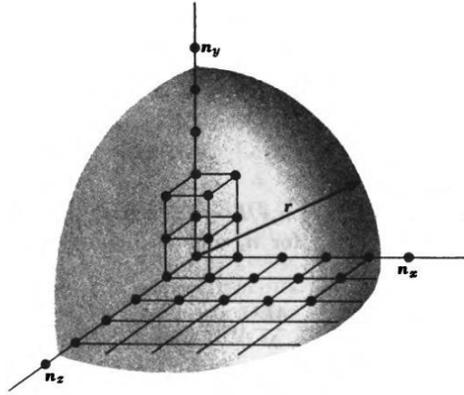


Figura 2: Modos normales dentro de una cavidad esférica finita

Nota Fuente: Richtmyer, F. K. Kennard, E. H. Cooper, J. (1969). *Introduction to Modern Physics*, (p. 124)

$$\frac{\partial^2 E_{k,s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{k,s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{k,s}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{k,s}}{\partial t^2} \quad (89)$$

Para solucionar la ecuación (89) se tiene en cuenta el método de separación de variables en coordenadas cartesianas.

$$E(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (90)$$

Reemplazando (89) en (90) y aplicando las segundas derivadas:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (91)$$

Separando cada variable y recordando que  $f(x) = g(y, z, t) = cte$ , se tiene para cada componente

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k_1 X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k_2Y = 0 \quad (92)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k_3Z = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} - c^2(k_1 + k_2 + k_3) = 0$$

De esto se tiene que existen 3 casos de las soluciones de (92), cuando:

$$k_1, k_2, k_3 > 0 ; k_1, k_2, k_3 = 0 ; k_1, k_2, k_3 < 0 \quad (93)$$

Para los dos primeros casos se obtienen que las soluciones son nulas al aplicar las condiciones de frontera de Dirichlet, por lo tanto solo se considera el último caso cuando  $k_1, k_2, k_3 < 0$ .

Entonces la ecuación (92) se reescribe.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_1X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_2Y = 0$$

(94)

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_3Z = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + c^2(k) = 0 ; k_1 + k_2 + k_3 = k$$

Donde las soluciones de cada ecuación son:

$$X(x) = Ae^{i\sqrt{k_1}x} + Be^{-i\sqrt{k_1}x}$$

$$Y(y) = Ce^{i\sqrt{k_2}y} + De^{-i\sqrt{k_2}y}$$

(95)

$$Z(z) = Ee^{i\sqrt{k_3}z} + Fe^{-i\sqrt{k_3}z}$$

$$T(t) = Ge^{ic\sqrt{k}t} + He^{-ic\sqrt{k}t}$$

Ahora aplicando condiciones de frontera de Dirichlet en cada solución:

$$X(0) = 0 ; X(L) = 0$$

De la misma manera para  $Y(y), Z(z), T(t)$  se obtienen las siguientes soluciones:

$$X(x) = A_n \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) ; k_1 = \left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 \quad (96)$$

$$Y(y) = B_n \sin\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) ; k_2 = \left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 \quad (97)$$

$$Z(z) = C_n \sin\left(\frac{n_3\pi}{L}z\right) ; k_3 = \left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2 \quad (98)$$

$$T(t) = G \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t\right) ; k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (99)$$

Combinando las ecuaciones (96), (97), (98) y (99) en (90).

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t\right) \quad (100)$$

Reemplazando en la ecuación (91) y aplicando las respectivas derivadas se obtiene

$$\left[\frac{n_1\pi}{L}\right]^2 + \left[\frac{n_2\pi}{L}\right]^2 + \left[\frac{n_3\pi}{L}\right]^2 = \left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^2 \quad (101)$$

Simplificando la anterior ecuación:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} \quad (102)$$

Ahora es necesario evaluar el número de modos que pueden cumplir esta condición, lo que equivale a contar todas las posibles combinaciones de los valores enteros  $n$ . Se puede hacer una aproximación tratando el número de combinaciones como el volumen de una cuadrícula tridimensional como se puede observar en la figura 1 encontrada en el libro [56], donde los valores de  $n$ , forman un "espacio- $n$ ". Utilizando la fórmula del volumen de una esfera, con los valores  $n$  especificando las coordenadas a lo largo de tres ejes  $n_x, n_y, n_z$ .

Teniendo en cuenta que el radio de dicha esfera es  $R$ , el volumen será:

$$V_n = \frac{4\pi}{3} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2} ; \quad R = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (103)$$

Sin embargo al considerar el radio de la esfera, los valores de  $n$  son tanto positivos como negativos, mientras que en la solución de la ecuación de onda, se utilizan solamente los valores positivos. Por lo tanto hay que tomar  $1/8$  del volumen anterior. Otro problema es que se pueden tener ondas polarizadas en dos planos perpendiculares, por lo que es necesario multiplicar por dos. Luego, se puede tomar el volumen como una medida del número de modos, convirtiéndose en una muy buena aproximación, cuando el tamaño de la cavidad es mucho mayor que la longitud de onda, como en el caso de ondas electromagnéticas en una cavidad finita. Utilizando la relación obtenida para los valores de  $n$ , esto se convierte en

$$V_n \approx N_{modos} = (2) \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(\frac{8L^3}{\lambda^3}\right) = \frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \quad (104)$$

Lo anterior puede reescribirse como

$$N_{modos} = \frac{k^3 V}{3\pi^2} \quad (105)$$

Luego multiplicando el número de modos en ambos lados de (88) se tiene

$$\langle H_s \rangle = \frac{\epsilon_0}{6\pi^2 c} R^4 |E_0|^2 \left( n_{\omega,s} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad ; \quad \langle H \rangle N_{mod} = \langle H_s \rangle \quad (106)$$

$$\langle H_s \rangle = \rho \left( n_{\omega,s} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (107)$$

Podemos observar que la ecuación (107) es igual a la expresión de la mecánica cuántica, a excepción de los parámetros de la constante de Planck y el significado de los  $n_{\omega,s}$ .

De igual manera se realizan los mismos procedimientos y cálculos anteriores, para obtener una ecuación similar a la (106), teniendo en cuenta la ecuación (42) a diferencia que los nuevos parámetros son el campo magnético y la permeabilidad magnética en el vacío.

$$\langle H_s \rangle = \frac{R^4}{6\pi^2 c \mu_0} |B_0|^2 \left( n_{\omega,s} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (108)$$

$$\langle H_s \rangle = g \left( n_{\omega,s} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (109)$$

### 7.3 Espectro de Planck Relativista para la Radiación de Campo Escalar, la Radiación de Punto Cero Clásica y Parámetro de Escala

Primero se considera la radiación electromagnética contenida en una caja esférica de volumen finito en el espacio libre. Suponiendo que las contribuciones de las partes eléctricas y magnéticas a la densidad de energía son iguales, en estas circunstancias en unidades SI

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 \quad (110)$$

Con la ecuación de movimiento para el campo electromagnético dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (111)$$

Donde  $\phi$  es un campo escalar y de la cual se infiere la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \epsilon_0 \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (112)$$

Y en consecuencia la energía es:

$$U = \epsilon_0 \int \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (113)$$

Los movimientos térmicos aleatorios pueden ser expresados en términos de las oscilaciones de los modos normales con fases aleatorias entre los modos. El campo  $\phi(ct, x, y, z)$  expresado en modos electromagnéticos viene dado por el término de expansión [57]

$$\phi(ct, x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{g(c\vec{k})}{V^{1/2}} \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - kct - \theta(\vec{k})] \quad (114)$$

Donde  $g(c\vec{k})$  es llamada la amplitud de función de distribución por modo. Así, la energía de la radiación térmica en una cavidad puede expresarse como una suma sobre las energías de los modos normales de oscilación. Dentro de la física clásica la radiación térmica es tratada como radiación electromagnética clásica. Definiendo

$$g(c\vec{k}) = \delta_0 h(c\vec{k}) \quad (115)$$

Donde  $\delta_0$  es un factor constante extraído de  $g(c\vec{k})$

Utilizando las ecuaciones (114) y (115) en la ecuación (113), la energía  $U$  electromagnética es

$$U = \epsilon_0 \delta_0^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [h(c\vec{k})]^2 k^2 \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - kct - \theta(\vec{k})] \quad (116)$$

Además, cada modo de oscilación tendrá una energía dada por

$$U_k = \epsilon_0 \delta_0^2 k^2 [h(c\vec{k})]^2 \quad (117)$$

Para que la ecuación (117) sea dimensionalmente correcta, y dado que el término  $k^2 [h(c\vec{k})]^2$  tiene unidades de volumen,  $\delta_0^2$  debe tener dimensiones de campo eléctrico. De esta forma

$$U_k = \epsilon_0 E_0^2 k^2 [h(c\vec{k})]^2 \quad (118)$$

En la ecuación (118) se ha tomado

$$\delta_0^2 = E_0^2$$

Se puede adaptar las unidades en el coeficiente de  $k^2 [h(c\vec{k})]^2$  mediante la extracción de un factor constante que tiene unidades de volumen por el tiempo.

Suponiendo que el factor constante es

$$\gamma_0 = \frac{L^4}{c}$$

Donde  $L$  es un factor con dimensiones de longitud y  $c$  es la velocidad de la luz en el espacio libre.

Así que,

$$[h(c\vec{k})]^2 = \gamma_0 [f(c\vec{k})]^2 = \frac{L^4}{c} [f(c\vec{k})]^2 \quad (119)$$

La energía por modo adquiere la forma:

$$U_k = \epsilon_0 E_0^2 \frac{L^4}{c} k^2 [f(c\vec{k})]^2 = \beta k^2 [f(c\vec{k})]^2 = k^2 [F(c\vec{k})]^2 \quad (120)$$

Cuando se ha insertado los parámetros  $\beta$  en la función  $[F(c\vec{k})]^2$ , de una manera que

$$[F(c\vec{k})]^2 = \beta [f(c\vec{k})]^2 \quad (121)$$

Hemos encontrado que el parámetro  $\beta$ , tiene unidades de J. S, definido por

$$\beta = \epsilon_0 E_0^2 \frac{L^4}{c} \quad (122)$$

Se puede determinar numéricamente conociendo la dimensión lineal  $L$  de la caja y el valor de  $E_0^2$  que es el valor medio de la amplitud del campo eléctrico, que corresponde a los diferentes modos de oscilación. El parámetro  $\beta$  es fija, y en esta aproximación, describe la energía clásica de punto cero.

$$U_0 = \frac{1}{2} \beta \omega \quad (123)$$

Desde el valor de  $U_k$  en la ecuación (120), la energía por modo de oscilación, que se va a determinar para los valores a alta y baja temperatura será a partir del criterio del comportamiento monótono de la función potencial canónica  $\phi\left(\frac{\omega}{T}\right)$ , para encontrar el espectro de radiación de Planck con energía de punto cero clásico [46]. Para  $T$  pequeñas, se debe tener la energía clásica de punto cero  $1/2 \beta \omega$ , de la ecuación (11).

$$U_0 = -\omega \phi'_0\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{2} \beta \omega \quad (124)$$

Teniendo en cuenta que  $\omega/T = z$

$$-\phi'_0(z) \rightarrow \frac{\beta}{2} \quad ; \quad z \rightarrow \infty \quad (125)$$

Así:

$$-\phi_0(z) \rightarrow \frac{\beta}{2} z \quad ; \quad z \rightarrow \infty \quad (126)$$

Para los valores grandes de  $T$ , el límite de Rayleigh-Jeans, en la ecuación (11) queda

$$U_\infty = -\omega \phi'_\infty(z) = K_B T \quad (127)$$

Cuando 
$$-\phi'_\infty(z) \rightarrow \frac{K_B}{z} \quad ; \quad z \rightarrow 0 \quad (128)$$

$$-\phi_{\infty}(z) \rightarrow K_B \ln z \quad ; \quad z \rightarrow 0 \quad (129)$$

Donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann

Las ecuaciones (126) y (129) dan a los comportamientos extremos de la función de potencial canónica  $\phi(z)$ . En, la función potencial canónica en general  $\phi(z)$ , al igual que sus derivados, debe preservar su característica de monotonía en todo el rango  $(0, \infty)$ .

El cociente

$$y = \frac{U_0}{U_{\infty}} = \frac{\frac{1}{2}\beta\omega}{K_B T} = \frac{\beta\omega}{2K_B T} = \frac{\beta}{2K_B} z \quad (130)$$

Este argumento de la función monótona suave dado por la función  $M(y)$ , con valores extremos dados por las ecuaciones (125) y (128), que determinan la energía  $U(\omega, T)$

$$U(\omega, T) = -\omega\phi' \left( \frac{\omega}{T} \right) = -\omega M(y) \quad (131)$$

En la referencia [50], el autor mostró que una función apropiada que mantiene la monotonía suave de  $\phi(z)$ , y sus derivadas, la función de interpolación entre estos dos límites, en todo el rango de variación de  $z = \omega/T$  está dada por la ecuación

$$\phi(z) = -\beta \ln(\sinh z) \quad (132)$$

De este modo

$$\phi' \left( \frac{\omega}{T} \right) = M(y) = -\frac{\beta}{2} \coth \left( \frac{\beta\omega}{2K_B T} \right) \quad (133)$$

Adaptando esta función a la ecuación (131)

$$U(\omega, T) = U_0 \coth\left(\frac{\beta\omega}{2k_B T}\right) = \frac{1}{2} \beta\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2k_B T}\right) \quad (134)$$

$$U(\omega, T) = \frac{\beta\omega}{e^{\left[\frac{\beta\omega}{k_B T}\right]^{-1}} + 1} + \frac{\beta\omega}{2} \quad (135)$$

La ecuación (134) es una nueva versión del espectro de cuerpo negro de Planck, que incluye la energía clásica del punto cero,  $U_0$  y el parámetro de escala  $\beta$ .

La energía clásica del punto cero está dado por

$$U_0 = \frac{1}{2} \beta\omega \quad (136)$$

Donde el parámetro de escala es:

$$\beta = \frac{\varepsilon_0}{c} [E_0 L^2]^2 \quad (137)$$

El parámetro de escala depende de las propiedades geométricas, dimensión lineal  $L$  de la caja, y de las propiedades electromagnéticas, la permitividad del espacio libre  $\varepsilon_0$ , la velocidad de la luz  $c$  y el cuadrado de la amplitud del valor medio del campo eléctrico.

De la misma forma también el parámetro de escala puede ser determinado por propiedades magnéticas, desde la ecuación (110) y realizando los pasos propuestos anteriormente y descritos en la ecuación (42) la ecuación queda

$$\alpha = \frac{1}{c\mu_0} |L^2 B_0|^2 \quad (138)$$

## 8 Análisis, Discusión de Resultados y conclusiones

En esta sección se concentra la atención en el parámetro de escala  $\beta$ , determinando su valor para diferentes sistemas físicos radiantes, modelados como cuerpo negro, encontrando que su valor es muy cercano a los reportados por las mediciones experimentales de la fuerzas de Casimir entre

placas conductoras descargadas [43]. De la misma forma el valor predicho para el parámetro de escala en esta investigación está en muy cercana coincidencia con la constante de Planck.

Las secciones 7.2 y 7.3 contienen un análisis de nuestros resultados con su respectiva contrastación a nivel teórico y experimental; igualmente, en esta sección presentamos las conclusiones y perspectivas del estudio.

### 8.1 El parámetro de escala y su Relación con sistemas físicos Radiantes

El parámetro de escala fija la energía del punto cero clásica y tiene dimensión de Joule por segundo en el sistema internacional de unidades, en el caso de la ecuación (137) el valor numérico es

$$\beta = \frac{\varepsilon_0}{c} [E_0 L^2]^2 \approx 2.95 \times 10^{-20} \frac{C^2 S}{Nm^3} [E_0 L^2]^2 \quad (139)$$

Con la dimensión lineal  $L$  en metro y  $E_0$  en  $V/m$  o en  $N/C$ .

Ahora para la ecuación (138) se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{c\mu_0} |L^2 B_0|^2 \approx 2.65 \times 10^{-3} \frac{A^2 S}{Nm} |L^2 B_0|^2 \quad (140)$$

Con la dimensión lineal  $L$  en metro y  $B_0$  en  $T$  (Tesla)

Teniendo en cuenta que los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  se relacionan con las mediciones experimentales de las fuerzas de Casimir y que su orden de magnitud es similar a  $\hbar$ , se realiza una estimación de la dimensión lineal de algunos sistemas radiantes reportados en la literatura [58]. La Tabla 1 muestra algunos de los valores reportados para  $E_0$  y la estimación realizada para la dimensión lineal  $L$  utilizando la ecuación (139), del mismo modo la Tabla 2 muestra algunos de los valores reportados para  $B_0$  y la estimación realizada para la dimensión lineal  $L$  utilizando la ecuación (140). Donde  $\beta/2 = 0.527 \times 10^{-34} J.S$  es el valor experimental reportado por mediciones Efecto Casimir [43].

## 8.2 Análisis de Tablas

Se ha encontrado el espectro de radiación de cuerpo negro utilizando sólo la física clásica, con la adición del punto cero clásico de la radiación  $U_0$  dada por la ecuación (136), y con la introducción de un parámetro de escala  $\beta$ , que se define en la ecuación (139).

El parámetro de escala  $\beta$  tiene conexión con las mediciones experimentales de las fuerzas de Casimir, pero su valor numérico teórico depende de las propiedades geométricas de la caja de resonancia y propiedades eléctricas. Las constantes  $\beta$  y  $\alpha$  obtenidas como parámetros de escala para la radiación de energía de punto cero se encontraron con argumentos de la teoría clásica y no implica la cuantificación de la energía; Sin embargo, su valor numérico es del orden de la constante de Planck. Los argumentos anteriores muestran que la constante de Planck puede aparecer en la mecánica cuántica o en la mecánica clásica, de la misma manera como la energía de punto cero puede ser clásica o cuántica.

Para los campos eléctricos o magnéticos típicos mostradas en las tablas de datos, son generados por diversos sistemas físicos oscilantes, se encuentra con que el parámetro  $L$  que tiene valores coherentes con la dimensión lineal real de los sistemas radiantes.

<i>Descripción de Campo eléctrico</i>	<i>Valores de <math> E_0 </math> (N/C)</i>	<i>Tamaño en <math>L</math> (m)</i>	<i>Valor Experimental <math>L</math> (m)</i>	<i>Correspondencia de acuerdo al valor de <math>L</math> (m)</i>
Campo justo debajo de una línea de alta potencia	0.55	$0.329 \times 10^{-3}$	$0.300 \times 10^{-3}$	protista unicelular del género Ameba
Campo de una bombilla de 100W a 1m de distancia	50	$34.57 \times 10^{-6}$	$30 \times 10^{-6}$	Diámetro del cabello humano
Campos eléctricos en pulsos laser de petawatts	$10^{13}$	$77.312 \times 10^{-12}$	$79 \times 10^{-12}$	Radio Atómico del Cloro
Campos eléctricos en iones U91 +, en el núcleo	$10^{18}$	$0.244 \times 10^{-12}$	$2.426 \times 10^{-12}$	Longitud de onda de Compton en electrones

Máximo campo eléctrico práctico en vacío, limitado por electrón. producción de pares	$1.3 \times 10^{18}$	$0.214 \times 10^{-12}$	$2.426 \times 10^{-12}$	Longitud de onda de Compton en electrones
Campo eléctrico máximo posible en la naturaleza (Planck corregido campo eléctrico $c^4/4Ge$ )	$1.9 \times 10^{62}$	$1.744 \times 10^{-35}$	$1.62 \times 10^{-35}$	Longitud de Planck

Tabla 1: Determinación de los valores de la dimensión lineal L en la ecuación (139)

<b>Descripción de Campo Magnético</b>	<b>Valores de <math> B_0 </math> (T)</b>	<b>Tamaño en L (m)</b>	<b>Valor Experimental L (m)</b>	<b>Correspondencia de acuerdo al valor de L (m)</b>
Campo magnético medido más bajo (Ej. Campos de Schumann resonancias)	$1 \times 10^{-15}$	0.446	1	ADN (humano)
Campo magnético producido por las corrientes cerebrales	$1.5 \times 10^{-12}$	$11 \times 10^{-3}$	$8.870 \times 10^{-3}$	Neuronas y otro tipo de células
Campo magnético directamente debajo de la línea eléctrica de alto voltaje	$0.55 \times 10^{-6}$	$19.042 \times 10^{-6}$	$15 \times 10^{-6}$	Diámetro del cabello humano
Campo magnético cerca de teléfono móvil	$10 \times 10^{-5}$	$1.412 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-6}$	Órganos y células en Animales y plantas
Campos Magnético en pulsos laser de petawatts	$30 \times 10^3$	$81.534 \times 10^{-12}$	$79 \times 10^{-12}$	Radio Atómico del Cloro
Campo de la estrella de neutrones	$1 \times 10^6$	$14.122 \times 10^{-12}$	$25 \times 10^{-12}$	Átomo de hidrogeno
Campo magnético crítico cuántico	$4.4 \times 10^9$	$21.289 \times 10^{-12}$	$2.426 \times 10^{-12}$	Longitud de onda de Compton en electrones
Campo Magnético máximo posible en la naturaleza (Planck corregido campo eléctrico $c^4/4Ge$ )	$6.3 \times 10^{53}$	$1.779 \times 10^{-35}$	$1.62 \times 10^{-35}$	Longitud de Planck

Tabla 2: Determinación de los valores de la dimensión lineal L en la ecuación (140)

### 8.3 Conclusiones

- Lo importante en este trabajo es la “Discretización clásica” de la energía electromagnética dada por los valores de los armónicos esféricos a partir del término  $\left(n_{\omega,s} + \frac{1}{2}\right)$  que puede ser comparado con la cuantización de la energía del oscilador armónico cuántico, ya que en ambos procedimientos la interpretación que se le da al número “n” es de un número entero; pero en el procedimiento cuántico se enfoca en los valores discretos de la energía que ocupan ciertos niveles y en nuestro caso “n” viene descrito por el número de armónicos esféricos. Ante esto no se quiere establecer una conexión directa con los niveles de energía; sin embargo, este procedimiento clásico encuentra una regla de cuantificación que se parece a la regla de la mecánica cuántica.
- Con este trabajo se evidencia que la constante de Planck no es directamente una constante universal en la mecánica cuántica sino que también se puede relacionar con parámetros clásicos de la radiación en una cavidad finita, utilizando elementos de la electrodinámica clásica y la termodinámica.
- En esta investigación se obtuvo una formulación en la cual, la energía del campo de radiación en un volumen finito presenta una radiación clásica de punto cero, en donde aparece un parámetro de escala  $\beta$  con unidades SI, similares a la constante reducida de Planck  $\hbar$ .

### Apendice

Para el desarrollo de la ecuación (22) son necesarias una serie de operaciones matemáticas que se mostraran a continuación:

Inicialmente se considera que existe una radiación coherente que implica relaciones entre las fases  $\left(\theta(\vec{k}) - \theta(\vec{k}')\right)$  fijas entre los distintos modos  $\phi_k$  y  $\phi_{k'}$  que se utilizan para descomponer

un patrón de radiación. La radiación aleatoria implica la situación opuesta, además se puede escribir de la forma:

$$\phi(ct, x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f(c\vec{k})}{(L_x L_y L_z)^{1/2}} \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - kct - \theta(\vec{k})] \quad (a)$$

Donde la fase  $\theta(\vec{k})$  se distribuye aleatoriamente en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y se distribuye aleatoriamente para cada  $\vec{k}$ . Es conveniente caracterizar la radiación aleatoria, tomando la función de correlación de dos puntos de los campos  $\langle \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') \rangle$  donde se obtiene promediando a lo largo de las fases.

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta(\vec{k}) \cos(\vec{k}') \rangle &= \langle \sin \theta(\vec{k}) \sin \theta(\vec{k}') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\ \langle \cos \theta(\vec{k}) \sin \theta(\vec{k}') \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la función de correlación de dos puntos para una distribución isotrópica general de ondas escalares clásicas

$$\begin{aligned} \langle \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') \rangle &= \\ &\langle \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \frac{f(c\vec{k})}{(L_x L_y L_z)^{1/2}} \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - kct \\ &- \theta(\vec{k})] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f(c\vec{k}')}{(L_x L_y L_z)^{1/2}} \cos[\vec{k}' \cdot \vec{r}' - k't' - \theta(\vec{k}')] \rangle \\ \langle \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \frac{f(c\vec{k})^2}{L_x L_y L_z} \cos[\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - kc(t - t')] \quad (b) \end{aligned}$$

Ahora considerando una caja muy grande, los modos normales, están muy espaciados y las sumas sobre los enteros  $n_x, n_y, n_z$ . Pueden reemplazarse por integrales de la forma:

$$dk_x = (2\pi/L_x)dn_x ; \quad dk_y = (2\pi/L_y)dn_y ; \quad dk_z = (2\pi/L_z)dn_z$$

Donde la ecuación anterior queda

$$\langle \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') \rangle = \frac{1}{16\pi^3} \int d^3k f(c\vec{k})^2 \cos[\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - \omega(t - t')] \quad (c)$$

En el trabajo a seguir, estaremos interesados en las distribuciones isotrópicas de radiación aleatoria, de modo que la función  $f(c\vec{k})$  involucra solo la magnitud  $ck = \omega$  en este caso, podemos llevar a cabo las integraciones angulares para  $k$  en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} < \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') & \\ & \geq \frac{1}{8\pi^2(\vec{r} - \vec{r}')} \int_0^\omega d\omega \omega f(c\vec{k})^2 \sin[\omega/c(\vec{r} - \vec{r}') - c(t - t')] + \sin[\omega/c(\vec{r} - \vec{r}') - c(t - t')] \end{aligned} \quad (d)$$

En el caso de la radiación térmica, sabemos de las ecuaciones (19) y (21) que la función espectral  $f_t(\omega)$  para el campo de radiación, toma la forma de  $f_t(\omega)^2 = 8\pi c^2 U_\omega / \omega^2 = 8\pi c^2 F(\omega/T) / \omega$  de modo que la función de correlación de dos puntos en la ecuación (b) se convierte en

$$\begin{aligned} < \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') & \geq \\ & = \frac{1}{\pi(\vec{r} - \vec{r}')} \int_0^\omega d\omega F(\omega/T) \sin[\omega/c(\vec{r} - \vec{r}') - c(t - t')] + \sin[\omega/c(\vec{r} - \vec{r}') - c(t - t')] \end{aligned} \quad (e)$$

Donde ahora  $\omega/T = v \rightarrow \omega = vT ; d\omega = Tdv$  entonces (e) queda

$$\begin{aligned} < \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') & \geq \\ & = \frac{T^2}{\pi(\vec{r} - \vec{r}')} \int_0^\omega dv v F(v) \sin[v/c[T(\vec{r} - \vec{r}') - cT(t - t')] \\ & + \sin[v/c[T(\vec{r} - \vec{r}') - cT(t - t')] \end{aligned} \quad (f)$$

También podemos especializar la situación del caso donde la separación espacial se vuelve pequeña  $(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow 0$ . En este límite, la función de correlación de campos en un solo punto de coordenadas espaciales  $(x, y, z) = (x', y', z')$  pero en dos momentos diferentes,  $t ; t'$  se convierte en

$$< \phi(ct, x, y, z) \phi(ct', x', y', z') > = T^2 \aleph[T(t - t')] \quad (g)$$

Donde  $\aleph[T(t - t')]$  es una función desconocida de la temperatura multiplicada por el tiempo.

Ahora en este momento se desconoce la función espectral dada por  $f_t(\omega)^2 = 8\pi c^2 U_\omega / \omega^2 = 8\pi c^2 F(\omega/T) / \omega$  para la radiación térmica a temperatura no nula. Sin embargo se ha establecido la forma espectral para la radiación de punto cero en la ecuación (21). Basado en la invarianza del espectro de Lorentz.

Por lo tanto de [28], se va a considerar un campo escalar aleatorio  $\phi(x)$  ;  $x = (ct, r)$  en el espacio –tiempo de Minkowski. El campo satisface la ecuacion de onda libre.

Por lo tanto se y por lo tanto se puede expandir en ondas planas. La invariancia de Lorentz de la radiación del punto cero escalar, se puede introducir al requerir que la función de correlación de dos puntos  $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle$  tome el mismo valor en cada marco inercial. Junto con los supuestos de homogeneidad del espacio-tiempo e isotropía, este supuesto fija la forma (9) del campo aleatorio  $\phi(x)$  hasta una constante multiplicativa como

$$\langle \phi(x) \rangle = \int_0^\omega d^3k f(\omega) \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \theta(\vec{k})] \quad (h)$$

Con el espectro dado por

$$f(\omega)^2 = \text{Constante}/\omega \quad (i)$$

Aquí, la frecuencia angular  $\omega$  y el vector de onda  $k$  están conectados como  $\omega = ck$  , y  $\theta(\vec{k})$  es una fase aleatoria distribuida uniformemente sobre  $(0, 2\pi)$ , distribuida independientemente para cada  $k$ . Para establecer la conexión natural con En el caso electromagnético, elegimos la constante indeterminada para el espectro (i)

$$\pi f(\omega)^2 = \hbar c^2 / 2\omega \quad (j)$$

Notamos que este espectro en la integral de  $\phi(x)$  queda:

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \int d^3k_1 \int d^3k_2 f(\omega_1)f(\omega_2) \langle \cos[\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t - \theta(\vec{k}_1)] \cos[\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t - \theta(\vec{k}_2)] \rangle \quad (k)$$

Donde

$$\langle \cos \theta(\vec{k}) \cos(\vec{k}') \rangle = \langle \sin \theta(\vec{k}) \sin \theta(\vec{k}') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{k,k'}$$

$$\langle \cos \theta(\vec{k}) \sin \theta(\vec{k}') \rangle = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(x') \rangle &= \frac{\hbar c^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{|k|} \cos[\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega T] \\ \langle \phi(x)\phi(x') \rangle &= \frac{\hbar c^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} \cos[\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega T] d\varphi \quad (l) \end{aligned}$$

Donde

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'; \quad T = t - t'$$

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \frac{\hbar c^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \{ \sin[k(R - ct)] + \sin[k(R + ct)] \} \quad (m)$$

Evaluando la integral anterior se encuentra la funcion de correlacion de dos puntos en forma cerrada.

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \frac{\hbar c^2}{2\pi R} \left( \frac{1}{(R - ct)} + \frac{1}{(R + ct)} \right)$$

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle = -\frac{\hbar c}{\pi (\vec{x} - \vec{x}')^2}$$

Donde  $(\vec{x} - \vec{x}')^2 = (t - t')^2 - (\vec{r} - \vec{r}')^2$

$$\langle \phi_0(ct, x, y, z)\phi_0(ct', x', y', z') \rangle = \frac{-\hbar c}{\pi [c^2(t - t')^2 - (\vec{r} - \vec{r}')^2]} \quad (n)$$

## Referencias

- [1] J. Mehra y H. Rechenberg, The Historical Development of Quantum Theory. Vol. 6, New York: SpringerVerlag, 2000.
- [2] L. Landau y E. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. 3d, Oxford: Pergamon Press, 1977.

- [3] T. H. Boyer, «Derivation of the Planck spectrum for relativistic classical scalar radiation from thermal equilibrium in an accelerating frame,» *Physical Review D*, vol. 81, n° 10, p. 105024, 2010.
- [4] T. Boyer, «arXiv.org,» 01 October 2017. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1710.01616>.
- [5] F. K. Richtmyer, *Introduction to Modern Physics*, New York: MCGrawHill Education, 1928.
- [6] K. Hirata, «Canonical Quantization of the Electromagnetic Field with Dirac's Monopoles,» *Physics Letters*, vol. Vol 112B, n° 6, pp. 458-462, 1982.
- [7] A. M. Arthurs, «On quantization of the electromagnetic field,» *Elsevier*, vol. 75, n° 24, pp. 14-16, 1979.
- [8] A. O. Barut, «Formulation of wave mechanics without the Planck constant  $\hbar$ ,» *Physics Letters A*, vol. 171, n° 30, pp. 1-2, 1992.
- [9] J. P. Ralston, «arXiv.org,» 25 Marzo 2012. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1203.5557>.
- [10] R. Tremblay, N. Doyon y C. Ni Allen, «arXiv.org,» 21 Febrero 2015. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1502.06141>.
- [11] T. W. Marshall, «Statistical Electrodynamics,» *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 61, n° 2, pp. 537-546, 1965.
- [12] L. A. Ureña Lopez y J. M. Reyes Ibarra, «La radiación del fondo cósmico,» *Revista mexicana de física*, vol. 53, n° S4, pp. 133-136, 2007.
- [13] L. De La Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*, Mexico D.F: Fondo de Cultura Económica, 2006.
- [14] C. Schiller, *Motion Mountain: the adventure of physics – vol.1*, Munich: Christoph Schiller, 2011.
- [15] C. Schiller, *Motion Mountain: the adventure of physics – vol.2*, Munich: Christoph Schiller, 2018.
- [16] W. Heitler, Heitler W., *The Quantum Theory of Radiation*, London: Oxford University

Press, 1954.

- [17] L. Mandel y E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, New York: Cambridge University Press, 1995.
- [18] A. Messiah , *Quantum Mechanics*, New York: Dover Publications, 1999.
- [19] M. Scully y S. Zubairy , *Quantum Optics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [20] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York: Wiley, 1999.
- [21] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [22] R. Eisberg y R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [23] T. H. Boyer, «Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions,» *Physical Review*, vol. 182, n° 5, pp. 1374-1383, June 1969.
- [24] T. H. Boyer, «Classical Statistical Thermodynamics and Electromagnetic Zero-Point Radiation,» *Physical Review*, vol. 186, n° 5, pp. 1304-1318, October 1969.
- [25] T. H. Boyer, «Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation,» *Physical Review D*, vol. 11, n° 4, pp. 790--808, 1975.
- [26] T. H. Boyer, «Equilibrium of random classical electromagnetic radiation in the presence of a nonrelativistic nonlinear electric dipole oscillator,» *Physical Review D*, vol. 13, n° 10, pp. 2832-2845, 1976.
- [27] T. H. Boyer, «Derivation of the Planck radiation spectrum as an interpolation formula in classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation,» *Physical Review D*, vol. 27, n° 12, pp. 2906-2911, 1983.
- [28] T. H. Boyer, «Conformal symmetry of classical electromagnetic zero-point radiation,» *Foundations of Physics*, vol. 19, n° 4, pp. 349-365, 1989.
- [29] E. Cunningham, «The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension Thereof,» *The London Mathematical Society*, vol. 2, n° 8, pp. 77-98, 1910.
- [30] T. H. Boyer, «Thermodynamics of the harmonic oscillator: Wien's displacement law and the Planck,» *American Journal of Physics*, vol. 71, n° 9, pp. 866-870, 2003.

- [31] H. Zinkernagel, «Niels Bohr on the Wave Function and the Classical/Quantum Divide,» *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 53, pp. 9-19, 2016.
- [32] A. Bokulich, «Open or Closed? Dirac, Heisenberg, and the Relation between Classical and Quantum Mechanics,» *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 35, n° 3, pp. 377-396, 2004.
- [33] J. H. Jeans, «On the laws of radiation,» *Proceedings Of The Royal Society Of London. Series A, Containing Papers Of A Mathematical And Physical Character*, vol. 76, pp. 545-552, 1905.
- [34] J. . W. Rayleigh, «Remarks upon the Law of Complete Radiation,» *Philosophical Magazine*, vol. 49, pp. 539-540, 1900.
- [35] M. Planck, «“Über eine Verbesserung der Wien’schen Spektralgleichung”,,» *Verhandl. d. Deutsch. Physik Gesellschaft*, vol. 2, pp. 202-204, 1900.
- [36] W. Thomson, «On some test-cases for the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of energy”,,» *Royal Society Publishing*, vol. 50, pp. 79-88, 1981.
- [37] M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, New York: Dover, 1959.
- [38] M. H. W. & J. Born, «Zur Quantenmechanik. II,» vol. 35, pp. 557-615, 1926.
- [39] R. L. Jaffe, «Casimir effect and the quantum vacuum,» *Phys. Rev. D*, vol. 72, n° 2, p. 021301 5pp, 2005.
- [40] M. Bartelmann, «The dark Universe,» *Rev. Mod. Phys*, vol. 82, n° 1, pp. 331-382, 2010.
- [41] S. Weinberg, «The cosmological constant problem,» *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, n° 1, pp. 1-23, 1989.
- [42] P. W. Higgs, «Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,» *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, n° 16, pp. 508-509, 1964.
- [43] S. K. Lamoreaux, «Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 um Range,» *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, n° 1, pp. 5-8, 1997.
- [44] M. Ibison, «Electrodynamics in the Zero-Point Field: On the Equilibrium Spectral Energy Distribution and the Origin of Inertial Mass,» *Foundations of Physics Letters*, vol. 16, n° 1,

pp. 83-90, 2003.

- [45] B. Ivlev, «Conversion of zero point energy into high-energy photons,» *Revista mexicana de física*, vol. 62, n° 1, pp. 83-88, 2016.
- [46] T. H. Boyer., «Blackbody radiation in classical physics: A historical perspective,» *American Journal of Physics*, vol. 86, n° 7, pp. 495-509, 2018.
- [47] C. L. Friedrich W. Hehl, «arXiv.org,» 8 October 2018. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1810.03569>.
- [48] V. Yu.L.Bolotin, «arXiv.org,» 23 December 2016. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1701.01022>.
- [49] L. Eaves, «arXiv.org,» 24 January 2018. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1801.10012>.
- [50] T. H. Boyer, «arXiv.org,» 02 February 2018. [En línea]. Available: <https://arxiv.org/abs/1802.04653>.
- [51] J. Baggott, *The Meaning of Quantum Theory*, New York: Oxford University Press, 1992..
- [52] R. Resnick, *Basic Concepts in Relativity an Early Quantum Theory*. 2nd, New York,: Wiley, 1972..
- [53] E. Butkov, *Mathematical Physics*, New York: Wesley Publishing Company, 1968.
- [54] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, New York: Jhon Wiley & Sons, 1987.
- [55] G. Arfken y H. Weber, Arfken G. and Weber H., *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*, Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [56] F. K. Richtmyer, E. H. Kennard y J. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, New Delhi: McGraw-Hill, 1969.
- [57] A. Zanglwill, *Modern Electrodynamics.*, New York: Cambridge U. Press, 2013.
- [58] C. Schiller, *Motion Mountain: the adventure of physics vol.3*, Munich: Christoph Schiller, 2018.
- [59] A. Sepúlveda, *Física matemática*, Medellín: Universidad de Antioquia, 2009.
- [60] V. Lavenda., *Approach, Statistical Physics: A Probabilistic*, New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 1991.

[61] L. D. Landau , E. M. Lifshitz y Pitaevskii, *Electrodynamics of continuous media*, Vol 8 (2nd ed.), Oxford: Butterworth-Heinemann, Butherworth-Hainimann, 1984.

[62] T. H. Boyer, « Thermal effects of acceleration through random classical radiation,» *Physical Review D*, vol. 21, n° 8, p. 2137-2148, 1980.