



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Solución Numérica de la Desintegración Radiactiva Estocástica Usando el Método de Euler-Maruyama

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ibáñez Paredes	María Camila

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Díaz Suescún	Daniel

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Física

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2022 **NÚMERO DE PÁGINAS:**35

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 3
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas_X__ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>inglés</u>
1. Decaimiento radiactivo estocástico	Stochastic radioactive decay
2. Decaimiento exponencial	Exponential decay
3. Método de Euler-Maruyama	Euler-Maruyama method
4. ecuaciones de Bateman	Bateman equations
5. Cálculo de Itô	Itô calculus

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este estudio se generalizan las ecuaciones de Bateman asociadas a la desintegración radiactiva mediante la incorporación de fluctuaciones estocásticas a través del cálculo de Itô, se obtiene así, una ecuación diferencial estocástica que describe la evolución temporal de las concentraciones de los radionucleidos. Este modelo no solo permite el cálculo de valores esperados, sino también la estimación de incertidumbres mediante las desviaciones asociadas a las variables aleatorias. La ecuación diferencial estocástica deducida se resolvió numéricamente mediante el método explícito e implícito de Euler-Maruyama considerando 5000 trayectorias brownianas. El costo computacional del método propuesto se reduce al encontrar una expresión analítica para la raíz cuadrada de la matriz de covarianza mediante la descomposición de Cholesky, resultando en una matriz bidiagonal inferior. Se encontraron buenas aproximaciones en valores esperados cuando se compara con la solución analítica de las ecuaciones de Bateman. También, se reportaron desviaciones asociadas a experimentos numéricos que involucran distintas sustancias radiactivas.



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

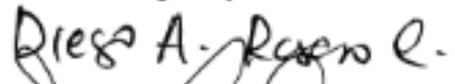
In this study, the Bateman's equations associated with radioactive decay are generalized by incorporating stochastic fluctuations through the calculation of Itô, thus obtaining a stochastic differential equation that describes the temporal evolution of radionuclide concentrations. This model not only allows the calculation of expected values, but also the estimation of uncertainties through the deviations associated with the random variables. The stochastic differential equation derived was solved numerically by the explicit and implicit Euler-Maruyama method considering 5000 Brownian trajectories. The computational cost of the proposed method is reduced by finding an analytical expression for the square root of the covariance matrix by Cholesky decomposition, resulting in a lower bidiagonal matrix. Approximations were found to be in agreement with the literature found in the expected values when compared to the analytical solution of Bateman's equations. Also, deviations associated with computational experiments involving different radioactive substances were reported.

APROBACION DE LA TESIS

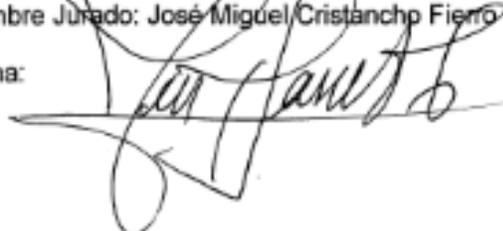
Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: 

Nombre Jurado: José Miguel Cristiancho Fierro

Firma: 



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CODIGO

AP-BIB-FO-06

VERSION

1

VIGENCIA

2014

PAGINA

1 de 2

Neiva, 15 de noviembre 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

María Camila Ibáñez Paredes, con C.C. No. 1075.309.883,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o _____

titulado Solución Numérica de la Desintegración Radiactiva Estocástica Usando el Método de Euler-Maruyama

presentado y aprobado en el año 2022 como requisito para optar al título de

Física;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CODIGO

AP-BIB-FO-06

VERSION

1

VIGENCIA

2014

PAGINA

2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: *María Camila Ibáñez Parales.*

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



Solución Numérica de la Desintegración Radiactiva Estocástica Usando el Método de Euler-Maruyama

María Camila Ibáñez Paredes

Código: 20152142113

Universidad Surcolombiana
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias Naturales
Programa de Física
Neiva, Colombia
2022

Solución Numérica de la Desintegración Radiactiva Estocástica Usando el Método de Euler-Maruyama

María Camila Ibáñez Paredes

Código: 20152142113

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Física

Director:

Daniel Suescún Díaz, PhD.

Línea de Investigación:

Física Nuclear

Grupo de Investigación:

Física Aplicada FIASUR

Universidad Surcolombiana

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Ciencias Naturales

Programa de Física

Neiva, Colombia

2022

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a:

A Dios quien ha sido mi guía, fortaleza y su mano de fidelidad y amor han estado conmigo hasta el día de hoy.

A mis Abuelos Giovanni y Gloria quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por vincular en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer las adversidades porque Dios está conmigo siempre.

A mi compañero sentimental Jesús Antonio por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento gracias.

A toda mi familia porque con sus consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a mi director de grado, por apoyarme cuando más lo he necesitado, por extender su mano en momentos difíciles y por el afecto brindado cada día, de verdad mil gracias profesor Daniel.

Agradecimientos

Quiero expresarle mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida y a toda mi familia por estar siempre presentes.

De igual manera mis agradecimientos a la facultad de Ciencias Exactas y Naturales, a mi Universidad Surcolombiana; a mis profesores quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer día a día como profesional, gracias a cada uno de ustedes por su paciencia, dedicación, apoyo incondicional y un buen compartir.

Finalmente, a mi director de grado el profesor Daniel Suescún Díaz, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su dirección, conocimiento, enseñanza y colaboración permitió el desarrollo de este trabajo, un abrazo.

Resumen

En este estudio se generalizan las ecuaciones de Bateman asociadas a la desintegración radiactiva mediante la incorporación de fluctuaciones estocásticas a través del cálculo de Itô, se obtiene así, una ecuación diferencial estocástica que describe la evolución temporal de las concentraciones de los radionucleidos. Este modelo no solo permite el cálculo de valores esperados, sino también la estimación de incertidumbres mediante las desviaciones asociadas a las variables aleatorias. La ecuación diferencial estocástica deducida se resolvió numéricamente mediante el método explícito e implícito de Euler-Maruyama considerando 5000 trayectorias brownianas. El costo computacional del método propuesto se reduce al encontrar una expresión analítica para la raíz cuadrada de la matriz de covarianza mediante la descomposición de Cholesky, resultando en una matriz bidiagonal inferior. Se encontraron buenas aproximaciones en valores esperados cuando se compara con la solución analítica de las ecuaciones de Bateman. También, se reportaron desviaciones asociadas a experimentos numéricos que involucran distintas sustancias radiactivas.

Palabras Claves: Decaimiento radiactivo estocástico, decaimiento exponencial, método de Euler-Maruyama, ecuaciones de Bateman, cálculo de Itô.

Abstract

In this study, the Bateman's equations associated with radioactive decay are generalized by incorporating stochastic fluctuations through the calculation of Itô, thus obtaining a stochastic differential equation that describes the temporal evolution of radionuclide concentrations. This model not only allows the calculation of expected values, but also the estimation of uncertainties through the deviations associated with the random variables. The stochastic differential equation derived was solved numerically by the explicit and implicit Euler-Maruyama method considering 5000 Brownian trajectories. The computational cost of the proposed method is reduced by finding an analytical expression for the square root of the covariance matrix by Cholesky decomposition, resulting in a lower bidiagonal matrix. Approximations were found to be in agreement with the literature found in the expected values when compared to the analytical solution of Bateman's equations. Also, deviations associated with computational experiments involving different radioactive substances were reported.

Keywords: Stochastic radioactive decay, exponential decay, Euler-Maruyama method, Bateman equations, Itô calculus.

Contenido

Resumen	1
Lista de Tablas	3
Lista de Figuras.....	3
Introducción.....	4
Marco Teórico	7
Ecuaciones del decaimiento radiactivo estocástico	7
Raíz cuadrada de la matriz de covarianza.....	13
Método de Euler-Maruyama	14
Resultados	16
Primer experimento numérico.....	16
Segundo experimento numérico.....	18
Tercer experimento numérico	22
Cuarto experimento numérico.....	25
Conclusiones.....	28
Referencias	29

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Comparación de valores esperados y desviaciones estándar en $t_{máx}$	17
Tabla 2. Máximas diferencias y error medio en el intervalo de tiempo.....	17
Tabla 3. Comparación de valores esperados y desviaciones estándar en $t_{máx}$ para el segundo experimento numérico con distintas particiones en el tiempo.....	19
Tabla 4. Máximas diferencias en el intervalo de tiempo para el segundo experimento numérico.....	20
Tabla 5. Error medio en el intervalo de tiempo para el segundo experimento numérico. ..	20
Tabla 6. Comparación de valores esperados obtenidos en $t_{máx}$ para el tercer experimento numérico con distintas particiones en el tiempo.....	23
Tabla 7. Valores de desviaciones estándar en $t_{máx}$ para el tercer experimento numérico con distintas particiones en el tiempo usando IEM.....	23
Tabla 8. Máximas diferencias en el intervalo de tiempo para el tercer experimento numérico.....	24
Tabla 9. Error medio en el intervalo de tiempo para el tercer experimento numérico.	24
Tabla 10. Símbolos de nucleidos, modo de decaimiento y constantes de decaimiento en la serie de desintegración del ${}^{90}_{232}Th$	26
Tabla 11. Valores Esperados y desviaciones estándar para el cuarto experimento numérico.	26

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Evolución temporal del valor esperado y cuatro trayectorias estocásticas de las concentraciones de ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$	18
Figura 2. Evolución temporal del valor esperado y cuatro trayectorias estocásticas asociadas a las sustancias ${}^{212}_{83}Bi$, ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$	21
Figura 3. Evolución temporal de la desviación asociada a las concentraciones de las sustancias ${}^{212}_{83}Bi$, ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$	21
Figura 4. Frecuencia relativa en $t_{máx}$ para las sustancias ${}^{212}_{83}Bi$, ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$	22
Figura 5. Valores esperados y método de referencia de las concentraciones de sustancias radiactivas para el tercer experimento numérico.	24
Figura 6. Evolución temporal de las concentraciones y desviaciones de las sustancias radiactivas para el tercer experimento numérico.....	25
Figura 7. Valores esperados de las concentraciones de las sustancias en el cuarto experimento numérico.....	27

Introducción

Alrededor del 95% de los más de 5000 átomos (nucleídos) conocidos son radiactivos; son la norma y no la excepción (Szymczak, 2012). Los procesos nucleares y la radiactividad inherente que producen son responsables de la materia que nos rodea. Lo que hace de la radiactividad natural un componente omnipresente del universo. Por si fuera poco, el decaimiento radiactivo tiene importantes aplicaciones en distintas áreas de las ciencias, incluida la medicina, donde los radioisótopos se utilizan como marcadores en ciertos procedimientos de diagnóstico, radiográficos, esterilización, entre otros (Kastanya, 2022), lo que ha dado lugar a un campo en rápido crecimiento conocido como medicina nuclear (Zanco et al., 2019). Desde el punto de vista de la salud pública, ha habido un especial interés por medir las concentraciones de radón en el interior de las viviendas. Esto debido a que estudios epidemiológicos en comunidades mineras en varios países han demostrado de manera concluyente que el radón 222 emanado de depósitos geológicos es un factor de riesgo importante para el cáncer de pulmón (Scott, 2014). Incluso, los gobiernos han podido adoptar medidas de protección adecuadas, así como evaluar el impacto de la radiactividad producida por el accidente de la central nuclear de Fukushima Dai-ichi, gracias a las mediciones y monitoreo de la radioactividad en el ambiente (Povinec et al., 2013).

La investigación en la geología también se ha beneficiado enormemente del fenómeno del decaimiento radiactivo; avances significativos en la datación absoluta de los fósiles y sedimentos del Cuaternario han sido posibles gracias al desarrollo de técnicas de datación, particularmente, la datación por radiocarbono (Elias, 2015). La medición de partículas alfa producidas por desintegración radiactiva de elementos pesados como el uranio y el torio han permitido identificar emisiones de radón en la superficie lunar, posiblemente asociadas con la actividad tectónica (Lawson et al., 2005). Los estudios de las técnicas de espectroscopia nuclear utilizadas para determinar la composición de las superficies y atmósferas de los planetas son otras aplicaciones de las reacciones nucleares y la desintegración radiactiva (Prettyman, 2014).

En la industria, la ciencia nuclear y la tecnología de radioisótopos desempeñan un papel importante en la comprensión de los yacimientos y, como resultado, aumentan las tasas de producción de petróleo y gas al respaldar las operaciones de extracción. También, se utiliza en la detección y protección del medio ambiente de la contaminación generada por derrames de petróleo (Al Nabhani, 2021). Los trazadores radioisótopos se emplean en estudios ambientales, como, por ejemplo, los de contaminación del agua en ríos y lagos (Gharibreza et al., 2022). Según (Crawford-Brown, 2011), la radiactividad es el contaminante más importante en el agua potable extraída de los acuíferos subterráneos, particularmente aquellos rodeados de roca granítica, ya que la radiactividad representa aproximadamente el 98% del riesgo de contaminación en estos suministros de agua.

Aunque existen varias aplicaciones para el decaimiento radiactivo, la descripción física del fenómeno está bien representada por la ley de desintegración radiactiva. (Soria, 2015).

Para un sistema de sustancias radiactivas o cadenas de decaimiento, el problema se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden conocido como ecuaciones de Bateman, nombradas así en honor a Henry Bateman, quien fue el primero en resolverlas (Bateman, 1910) para un caso específico donde la desintegración es lineal, es

decir, una sustancia solo puede desintegrarse en otra sustancia; desde entonces, las ecuaciones de la desintegración radiactiva ha sido objeto de investigación en física (Tadepalli & Subhash, 2018), matemática (Massey & Prentis, 2014), química e incluso ciencias de la computación (Ladshaw et al., 2020).

Distintos estudios han contribuido con soluciones analíticas del fenómeno, como, por ejemplo, (Cetnar, 2006) quien da una solución general a las ecuaciones de Bateman para cadenas de decaimiento lineal incluso cuando se presentan transiciones repetidas, (Dreher, 2013) propone otra solución general, teniendo en cuenta el caso único de los valores idénticos, y utilizando para ello derivadas de orden superior, (Thibes & de Oliveira, 2014) dan una solución directa al problema usando notación de índices, (Zhou et al., 2015) solucionan las ecuaciones de Bateman considerando ramificaciones y usando la transformada de Laplace, (Cruz-López et al., 2022) mediante el cálculo fraccionario encuentra un camino alternativo a la solución general; otros métodos se enfocan en la solución matricial del sistema que resulta en una matriz exponencial (Müller, 2018). También, existen modelos que contribuyen a la descripción probabilística del fenómeno, como (Halász & Szieberth, 2018) quienes presentan un modelo matemático de las cadenas de transmutación y decaimiento de nucleidos basados en cadenas de Markov de tiempo discreto y continuo. Desde el enfoque de Monte Carlo se calculan la abundancia e incertidumbre de radionucleidos de vida corta (Côté et al., 2019).

Este estudio propone, resuelve y prueba un nuevo modelo alternativo que considera las concentraciones de sustancias como variables aleatorias. Como resultado, la evolución temporal de las concentraciones de sustancias radiactivas se logra expresar mediante una ecuación diferencial estocástica de la forma de Itô que es equivalente a las ecuaciones de Bateman en valores esperados y que permite además estimar las incertidumbres asociadas a dichas variables aleatorias.

Objetivo General

Calcular numéricamente la desintegración radiactiva estocástica usando el método de Euler Maruyama implícito.

Objetivos Específicos

1. Deducir las ecuaciones del decaimiento radiactivo estocástico
2. Implementar simulaciones computacionales usando el método de Euler Maruyama implícito para el sistema diferencial estocástico de la desintegración radiactiva
3. Comparar los valores medios obtenidos con los métodos

Pregunta de Investigación

¿Será posible obtener una versión estocástica de la desintegración radiactiva con buenas aproximaciones en valores esperados usando el método de Euler Maruyama implícito?

$$N_i(t) = N_1(0) \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j \sum_{k=1}^i \prod_{\substack{l=1 \\ j \neq k}}^i \frac{e^{-\lambda_k t}}{\lambda_l - \lambda_k} \quad (4)$$

La solución a la ecuación (1) también se puede escribir en forma matricial,

$$\mathbf{N}(t) = e^{At} \mathbf{N}(0) \quad (5)$$

Dónde e^{At} es la matriz exponencial que se puede definir a partir de una expansión en series de Taylor (Raj & Kannan, 2021), se puede computar en distintas formas, por ejemplo, por medio de los polinomios asociados de Laguerre (She et al., 2012), el uso de aproximaciones racionales (Pusa & Leppänen, 2010; Pusa, 2011), por medio del método de Monte Carlo (She et al., 2013) y/o por la expansión Magnus (Cai et al., 2019); algunos otros algoritmos se comparan en la referencia (Isotalo & Aarnio, 2011).

Los métodos mencionados anteriormente hacen estimaciones de valores medios asociados a la concentración de sustancias y tratan al fenómeno del decaimiento radiactivo desde un enfoque determinista, no obstante, aunque la tasa de desintegración de un radionucleido específico puede calcularse a partir del número de átomos radiactivos y la constante de decaimiento por medio de las ecuaciones de Bateman, no hay forma de saber qué átomo radiactivo específico decaerá en qué intervalo de tiempo (Airey et al., 2012). Lo que permite concluir que la descomposición radiactiva es un proceso aleatorio y las ecuaciones de Bateman en su formulación original no dan cuenta la naturaleza estocástica del fenómeno. Sin embargo, es posible generalizar el modelo de decaimiento de sustancias radiactivas cuando se usa un modelo que se fundamenta en ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma de Itô.

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t, t)d\mathbf{W}_t \quad (6)$$

Dónde \mathbf{X}_t es el vector de variables aleatorias, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, t)$ es el vector de valores esperados, $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t, t)\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{X}_t, t)$ es la matriz de covarianzas y \mathbf{W}_t es el vector de procesos de Wiener o movimientos Brownianos.

La ecuación (6) representa la forma general para una ecuación diferencial estocástica de la forma de Itô asociada a un vector de variables aleatorias $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_t$ (Milstein & Tretyakov, 2021),

Considerando el caso particular cuando una sustancia N_1 que decae en una sustancia estable denotada por N_2 el sistema de Bateman que describe la evolución temporal de la concentración de la sustancia está dada por las ecuaciones (7) y (8),

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = -\lambda_1 N_1(t) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = \lambda_1 N_1(t) \quad (8)$$

En notación matricial, las ecuaciones (7) y (8) pueden escribirse como,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sí se toma un intervalo de tiempo Δt muy pequeño en el que la probabilidad de que ocurra más de un evento de decaimiento es despreciable, existirán dos opciones distintas para la ocurrencia de un evento.

Primera posibilidad: que una partícula de N_1 decaiga en N_2 , lo que provoca un cambio que se puede denotar con el vector de cambio,

$$\Delta \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Segunda posibilidad: No hay decaimiento de partículas, por lo que el vector de cambio es nulo,

$$\Delta \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

La probabilidad de que ocurra un evento de decaimiento de la sustancia N_1 se puede modelar con una aproximación razonable por medio de una distribución de Poisson (Kloeden & Platen, 1992). Como resultado, podemos expresar esta probabilidad mediante,

$$P_1 = N_1 \lambda_1 \Delta t \quad (12)$$

La probabilidad del segundo evento debe ser,

$$P_2 = 1 - N_1\lambda_1\Delta t \quad (13)$$

Con las ecuaciones (12) y (13) se puede calcular el vector de valores esperados,

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}_t, t) = E \left(\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^2 P_k \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix}_k = N_1\lambda_1\Delta t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1 - N_1\lambda_1\Delta t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Es fácil ver que el vector de valores esperados del sistema, mostrado en la ecuación (14), corresponde a la versión determinista dada por las ecuaciones de Bateman, como se muestra antes en la ecuación (9) y en,

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}_t, t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} \Delta t \quad (15)$$

La matriz de covarianza se puede calcular de manera análoga,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{N}_t, t) = E \left(\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 & \Delta N_2 \end{bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^2 P_k \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \Delta N_1 & \Delta N_2 \end{bmatrix}_k \quad (16)$$

Sustituyendo las probabilidades dadas por las ecuaciones (12) y (13) junto a los vectores de cambio dados por las ecuaciones (10) y (11) se obtiene la matriz de covarianzas,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{N}_t, t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 N_1 & -\lambda_1 N_1 \\ -\lambda_1 N_1 & \lambda_1 N_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Las ecuaciones (15) y (17), que corresponden al vector de valores esperados y la matriz de covarianza, respectivamente, permiten escribir el decaimiento radiactivo estocástico utilizando la ecuación diferencial estocástica,

$$d \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} \lambda_1 N_1 & -\lambda_1 N_1 \\ -\lambda_1 N_1 & \lambda_1 N_1 \end{bmatrix}^{1/2} d\mathbf{W}_t \quad (18)$$

La ecuación (18) es una ecuación diferencial de la forma de Itô, análoga a la ecuación (6), y se puede escribir de manera simplificada,

$$dN_t = AN_t dt + \sigma(N_t, t)dW_t \quad (19)$$

El proceso anterior tiene un fundamento procedimental que se proporciona en el trabajo de (Hayes & Allen, 2005), en el que se llevó a cabo un proceso análogo al deducir las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual, que es un modelo que describe la densidad de neutrones y la concentración de precursores en el núcleo de un reactor nuclear. Así, la generalización del modelo de decaimiento radiactivo para n sustancias radiactivas se puede lograr fácilmente con un enfoque algorítmico, que se resume en los siguientes pasos:

1. Calcular el número de eventos.
2. Calcular el vector de cambio asociado a cada evento.
3. Calcular la probabilidad con que ocurre cada evento.
4. Calcular el vector de valores esperados.
5. Calcular la matriz de covarianzas y su raíz cuadrada.

Los pasos 1 a 5 permiten construir un sistema de Itô. Ahora bien, si este procedimiento se aplica a la desintegración de n sustancias radiactivas, es posible obtener un modelo generalizado. Los pasos mencionados y los detalles de cada uno se describen a continuación.

Número de eventos: En el caso particular de dos sustancias, es posible ver que cuando no hay eventos de decaimiento, los vectores de cambio son nulos y no contribuyen en la evolución temporal; además, cuando los eventos se consideran independientes, las posibilidades de que dos partículas se desintegren en el mismo instante de tiempo se consideran despreciables. En consecuencia, para un conjunto de n sustancias que decaen linealmente, existen $n - 1$ eventos, cuando se considera la última sustancia estable.

Vectores de cambio: Si se considera una cadena de decaimiento lineal sin ramificaciones, donde una sustancia puede decaer únicamente en otra, podemos definir el primer evento como aquel en el que la sustancia N_1 decae en la sustancia N_2 , que se puede representar mediante el vector dado por,

$$(\Delta N)_1 = [-1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (20)$$

El segundo evento sería N_2 que decae en N_3 , y el k -ésimo evento sería la sustancia N_k que decae en N_{k+1} , así los elementos del vector de cambio para el k -ésimo evento se pueden construir mediante,

$$\begin{aligned}
\Delta N_k &= -1 \\
\Delta N_{k+1} &= 1 \\
\text{Para } k &= 1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{21}$$

Probabilidad con qué ocurren los eventos: A pesar de ciertas limitaciones (Sitek & Celler, 2015), el proceso Poisson describe con precisión el fenómeno de decaimiento radiactivo y en muchos textos como por ejemplo (Kloeden & Platen, 1992) y (Arfken et al., 2013) asumen que la distribución de Poisson es la ley que rige la estadística de decaimiento radiactivo. Incluso permite deducir la ley de decaimiento radiactivo (Marguet, 2017), y calcular las probabilidades de cada evento en función de la constante de decaimiento de la k -ésima sustancia,

$$P_k = \lambda_k N_k \Delta t \tag{22}$$

Vector de valores esperados: En el caso particular de dos sustancias se pudo notar que el vector de valores esperados corresponde a la versión determinista del sistema, por tanto, calcular este vector resulta trivial obteniendo como resultado,

$$\mu(N_t, t) = AN_t \tag{23}$$

Matriz de Covarianzas: La matriz de covarianza se construye a partir de los vectores de cambio de cada evento, y la probabilidad con que ocurre dicho evento,

$$\Sigma(N_t, t) = E(\Delta N \Delta N^T) = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \Delta N_k \Delta N_k^T \tag{24}$$

Sustituyendo en la ecuación (24) los distintos vectores de cambio calculados con la ecuación (21) junto a las probabilidades dadas por la ecuación (22), se obtiene la matriz de covarianza para el sistema, que resulta en una matriz tridiagonal cuyos elementos matriciales se pueden expresar mediante las siguientes relaciones: para la diagonal principal $\Sigma_{i,i} = \lambda_{i-1} N_{i-1} + \lambda_i N_i$, $\Sigma_{1,1} = \lambda_1 N_1$ y $\Sigma_{n,n} = \lambda_{n-1} N_{n-1}$, la diagonal inferior $\Sigma_{i-1,i} = -\lambda_{i-1} N_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y la diagonal superior $\Sigma_{i,i+1} = -\lambda_i N_i$ para $1 \leq i \leq n-1$; tal que,

$$\Sigma(N_t, t) = \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 & & & & & \\ -P_1 & P_1 + P_2 & -P_2 & & & & \\ & -P_2 & P_2 + P_3 & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & & & \\ & 0 & & -P_{n-2} & & & \\ & & & -P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-1} & -P_{n-1} & \\ & & & & -P_{n-1} & P_{n-1} & \end{bmatrix} \quad (25)$$

Raíz cuadrada de la matriz de covarianza

La matriz de covarianza resulta ser una matriz cuadrada de orden $n \times n$ tridiagonal simétrica definida positiva. Para calcular su raíz cuadrada, se utiliza la descomposición de Cholesky (Burden et al., 2017) dada por

$$\Sigma(N_t, t) = \sigma(N_t, t)\sigma^T(N_t, t) \quad (26)$$

Con,

$$\sigma(N_t, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Los elementos de $\sigma(N_t, t)$ se pueden hallar mediante las expresiones (Burden et al., 2017),

$$\sigma_{1,1} = \sqrt{\Sigma_{1,1}} \quad (28)$$

$$\sigma_{j,j} = \sqrt{\Sigma_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{j,k}^2} \quad 2 \leq j \leq n \quad (29)$$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{\sigma_{j,j}} (\Sigma_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{i,k} \sigma_{j,k}) \quad \text{para } i > j \quad (30)$$

Luego de implementar la descomposición la raíz cuadrada de la matriz de covarianza queda de la forma,

presenta dificultades de rigidez o stiffness en inglés (Sauer, 2018), un fenómeno común en el decaimiento radiactivo debido a la gran variación en la magnitud de las constantes de decaimiento, por este motivo es conveniente también considerar el esquema implícito de Euler-Maruyama descrito por,

$$\mathbf{N}_{k+1} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{N}_k + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{N}_k, k) \Delta \mathbf{W}_k) \quad (34)$$

Si se denota $\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1}$, entonces los elementos de la matriz \mathbf{S} , se pueden escribir de la forma,

$$S_{j,j} = \frac{1}{1 + \Delta t \lambda_j} \quad 1 \leq j \leq n \quad (35)$$

$$S_{i,j} = \frac{\prod_{q=j}^{i-1} \Delta t \lambda_q}{\prod_{q=j}^i (1 + \Delta t \lambda_q)} \quad \text{para } i > j \quad (36)$$

En este trabajo, se propone el uso de los métodos de Euler-Maruyama Implícito y Explícito en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas al decaimiento radiactivo; los resultados del método explícito de Euler-Maruyama se denotan con las letras EEM, mientras que los del método implícito se denotan con las letras IEM.

Resultados

Par validar la teoría y el método propuesto, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas por medio del método de Euler-Maruyama explícito e implícito, se consideran 5000 trayectorias brownianas en una serie de experimentos numéricos que tienen en cuenta constantes de decaimiento calculadas a partir de datos de la vida media reportados por (Kondev et al., 2021) mediante la relación $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$. Posteriormente, se calculan los valores esperados y se comparan con los valores que se obtienen por el modelo determinista dado por la solución analítica de las ecuaciones de Bateman, que servirá como método de referencia para este estudio. Finalmente, se reportan valores de la desviación estándar para cada experimento numérico.

Para evaluar el comportamiento del método a lo largo del intervalo de simulación, se examinan los errores; para ello se define la función de error E_r como la diferencia entre la solución analítica del modelo determinista y el valor esperado obtenido por el método propuesto. La función de error permite calcular máximas diferencias y errores medios en valores esperados,

$$E_r(t) = |N_a(t) - E[N(t)]| \quad (37)$$

Primer experimento numérico

Para el primer experimento numérico se tiene una reacción en donde el ${}^{208}_{81}\text{Tl}$ decae en ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ emitiendo un electrón y un antineutrino electrónico en lo que se denomina decaimiento beta negativo, la reacción nuclear es,



Si se considera, ${}^{208}_{81}\text{Tl} = N_1$ y ${}^{208}_{82}\text{Pb} = N_2$ con $\lambda_1 = 3.783 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$, se reescribe la ecuación (33) considerando únicamente dos sustancias, de esta forma se obtiene el esquema explícito descrito por,

$$\begin{bmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t \lambda_1 & 0 \\ \Delta t \lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1 N_1(k)} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_1 N_1(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W_1(k) \\ \Delta W_2(k) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Cuando se usa el método implícito dado por la ecuación (34), el sistema para el mismo experimento se reescribe como,

$$\begin{bmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Delta t \lambda_1}{1 + \Delta t \lambda_1} & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1 N_1(k)} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_1 N_1(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W_1(k) \\ \Delta W_2(k) \end{bmatrix} \right) \quad (40)$$

Para las simulaciones se considera la condición inicial como $\mathbf{N}(0) = [100, 0]^T$, con un tiempo de simulación dado por $t_{m\acute{a}x} = t_{\frac{1}{2}}({}^{208}_{81}Tl) = 183.18 \text{ s}$ y $Nt = 10^3$ como el número de particiones en el tiempo. La solución analítica al sistema determinista y método de referencia está dada por,

$$\begin{bmatrix} N_{a1}(t) \\ N_{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{a1}(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_{a1}(0)(1 - e^{-\lambda_1 t}) \end{bmatrix} \quad (41)$$

dónde $N_a(t)$ denota la solución analítica,

Tabla 1. Comparación de valores esperados y desviaciones estándar en $t_{m\acute{a}x}$.

Método	$E[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_2(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_2(t_{m\acute{a}x})]$
EEM	49.9256	50.0744	4.9456	4.9456
IEM	49.9497	50.0503	4.9439	4.9439
Referencia	50.0089	49.9911	NA	NA

La Tabla 1 muestra los resultados de valores esperados $E[N(t_{m\acute{a}x})]$ y desviaciones $\sigma[N(t_{m\acute{a}x})]$ para las concentraciones de ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$. Cuando se compara con la solución analítica de las ecuaciones de Bateman suministrada por la ecuación (41), los resultados de los métodos EEM e IEM para valores esperados muestran buenas aproximaciones. Las desviaciones estándar de las sustancias reportadas por los métodos IEM y EEM están alrededor del 10% del valor esperado; sin embargo, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de Bateman no dan cuenta de la desviación estándar de las concentraciones, por lo que este resultado se muestra como NA (No Aplica). La Tabla 2 contiene información calculada a partir de la ecuación (37) es decir, máximas diferencias y errores medios indicados como $MaxD[Er(t)]$ y $Mean[Er(t)]$, respectivamente. Estos valores muestran que el método de Euler-Maruyama Implícito y Explícito no presentan diferencias significativas en precisión cuando se utiliza la misma configuración.

Tabla 2. Máximas diferencias y error medio en el intervalo de tiempo.

Método	$MaxD[Er(t)]$	$Mean[Er(t)]$
EEM	0.1458	0.0976
IEM	0.1285	0.0824

La Figura 1 incluye una representación para cuatro trayectorias estocásticas asociadas a las sustancias N_1 y N_2 , se incluye, además, la curva de la evolución temporal de los valores esperados, se puede verificar que los valores esperados de las sustancias N_1 y N_2 tienden a igualarse luego de que transcurre $t_{1/2}(N_1)$. Y aunque no se observa una representación tradicional de un proceso de Poisson, las diversas trayectorias estocásticas muestran una representación alternativa del fenómeno que captura su dinámica estocástica.

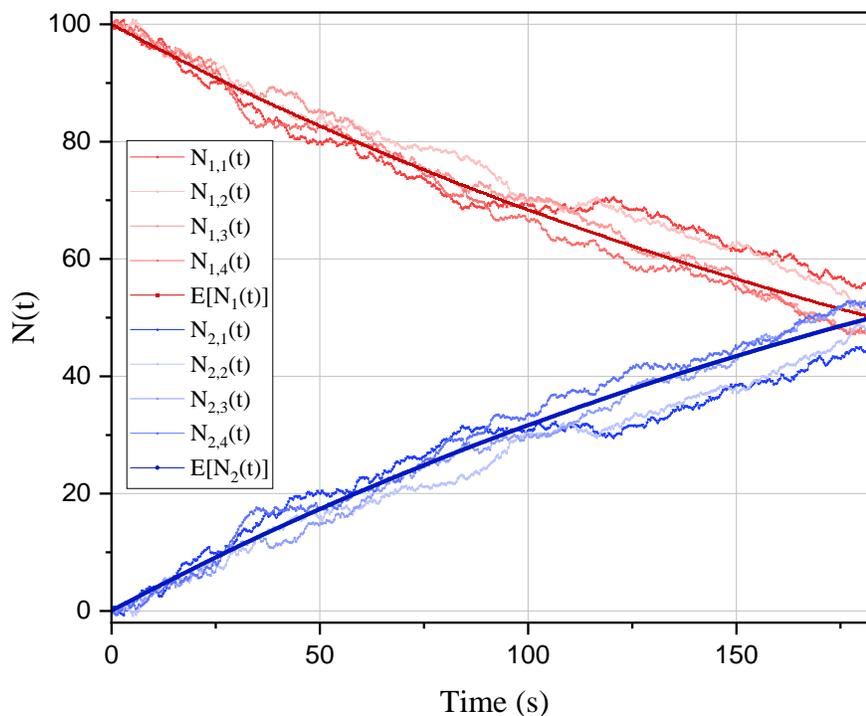


Figura 1. Evolución temporal del valor esperado y cuatro trayectorias estocásticas de las concentraciones de $^{208}_{81}Tl$ y $^{208}_{82}Pb$.

Segundo experimento numérico

En el segundo experimento numérico se consideran tres sustancias $^{212}_{83}Bi$, $^{208}_{81}Tl$ y $^{208}_{82}Pb$ que hacen parte de la serie de decaimiento $4n$, estas sustancias se encuentran relacionadas mediante reacciones nucleares. Para simplificar, solo se considera una de las ramificaciones del $^{212}_{83}Bi$, es decir, se asume que el 100% del decaimiento del $^{212}_{83}Bi$ se da emitiendo partícula α , y la posibilidad de que el evento de decaimiento emita partícula β^- se excluye en este experimento. La solución analítica y método de referencia se da mediante la ecuación (4), el tiempo máximo se fija como $t_{m\acute{a}x} = 2 t_{\frac{1}{2}}(^{212}_{83}Bi) = 7.266 \times 10^3 s$, con $t_{\frac{1}{2}}(^{212}_{83}Bi) = 3633 s$, se utiliza 5000 trayectorias brownianas, la condición inicial está dada como $N(0) = [100, 0, 0]^T$, se realiza una variación en la configuración del experimento

al considerar 4 valores en el número de particiones en el tiempo que permiten evaluar la estabilidad de los métodos.



Sea ${}^{212}_{83}\text{Bi} = N_1$, ${}^{208}_{81}\text{Tl} = N_2$ y ${}^{208}_{82}\text{Pb} = N_3$, se tiene entonces $\lambda_1 = 1.9074 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 3.783 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$ y $\lambda_3 = 0 \text{s}^{-1}$; así, es posible reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas usando el método explícito, dado en la ecuación (33),

$$\begin{bmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t \lambda_1 & 0 & 0 \\ \Delta t \lambda_1 & 1 - \Delta t \lambda_2 & 0 \\ 0 & \Delta t \lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{N_1(k)\lambda_1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{N_1(k)\lambda_1} & \sqrt{N_2(k)\lambda_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{N_2(k)\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W_1(k) \\ \Delta W_2(k) \\ \Delta W_3(k) \end{bmatrix} \quad (43)$$

El método de Euler-Maruyama implícito dado por la ecuación (34) se expresa mediante la ecuación matricial,

$$\begin{bmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t \lambda_1 + 1} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t \lambda_1}{(\Delta t \lambda_1 + 1)(\Delta t \lambda_2 + 1)} & \frac{1}{\Delta t \lambda_2 + 1} & 0 \\ \frac{\Delta t^2 \lambda_1 \lambda_2}{(\Delta t \lambda_1 + 1)(\Delta t \lambda_2 + 1)} & \frac{\Delta t \lambda_2}{\Delta t \lambda_2 + 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{N_1(k)\lambda_1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{N_1(k)\lambda_1} & \sqrt{N_2(k)\lambda_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{N_2(k)\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W_1(k) \\ \Delta W_2(k) \\ \Delta W_3(k) \end{bmatrix} \quad (44)$$

Los resultados del segundo experimento en valores esperados y desviaciones asociadas a las tres sustancias para el instante de tiempo $t = t_{m\acute{a}x}$ se registran en la Tabla 3, se puede observar que el método explícito tiene mejor aproximación. El método explícito, sin embargo, no converge cuando se utilizan pocas particiones de tiempo, es decir, tamaños de paso de tiempo grandes; en este punto, el método implícito se destaca por su capacidad de permanecer estable incluso cuando el tamaño de paso tiempo es grande, es decir pocas particiones en el tiempo.

Tabla 3. Comparación de valores esperados y desviaciones estándar en $t_{m\acute{a}x}$ para el segundo experimento numérico con distintas particiones en el tiempo.

Método	Nt	$E[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_2(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_3(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_2(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_3(t_{m\acute{a}x})]$
EEM	10^4	25.0090	1.3026	73.6884	4.3085	1.1263	4.3701
	10^3	25.0131	1.3489	73.6380	4.3218	1.1366	4.4136
	10^2	24.7912	1.3450	73.8638	4.3425	0.9134	4.4354
	10^1	--	--	--	--	--	--
IEM	10^4	25.0138	1.3028	73.6833	4.3091	1.1280	4.3703
	10^3	25.0612	1.3515	73.5874	4.3276	1.1538	4.4158
	10^2	25.2721	1.3749	73.3530	4.4009	1.1034	4.4531
	10^1	27.2832	1.4450	71.2718	4.4715	0.8026	4.4417

Referencia	25.0076	1.3279	73.6645	NA	NA	NA
------------	---------	--------	---------	----	----	----

En este experimento, $MaxD[Er(t)]$ que denota la máxima diferencia contiene 3 elementos, cada uno asociado a una sustancia, lo mismo es cierto para el error medio que se denota como $Mean[Er(t)]$. En la Tabla 4, se puede observar nuevamente que cuando se compara la precisión de los métodos mediante la máxima diferencia, los métodos IEM y EEM no muestran diferencias importantes cuando $Nt = 10^4$ y $Nt = 10^3$ e incluso $Nt = 10^2$; sin embargo, aumentar el número de particiones contribuye al cálculo del valor esperado, como se puede notar al revisar los resultados de errores medios en la Tabla 5, y contrastar con valores esperados en la Tabla 3. La convergencia del método de Euler-Maruyama explícito cuando $Nt = 10^1$ hace que este sea incapaz de producir resultados aceptables, se opta por no incluir estos valores en la Tabla 3, pero los resultados de máximas diferencias y errores medios se incluyen en la Tabla 4 y Tabla 5 para respaldar esta afirmación.

Tabla 4. Máximas diferencias en el intervalo de tiempo para el segundo experimento numérico.

Método	Nt	$MaxD[Er_1(t)]$	$MaxD[Er_2(t)]$	$MaxD[Er_3(t)]$
EEM	10^4	1.6349×10^{-1}	8.3880×10^{-2}	1.3045×10^{-1}
	10^3	9.3703×10^{-2}	8.6369×10^{-2}	1.2584×10^{-1}
	10^2	2.3929×10^{-1}	2.9483×10^{-2}	2.8188×10^{-1}
	10^1	2.7631×10^0	1.4039×10^3	1.4064×10^3
IEM	10^4	1.6102×10^{-1}	8.0683×10^{-2}	1.2800×10^{-1}
	10^3	1.0797×10^{-1}	7.1405×10^{-2}	1.0026×10^{-1}
	10^2	3.4997×10^{-1}	2.6067×10^{-1}	3.6359×10^{-1}
	10^1	2.3707×10^0	1.0341×10^0	2.4853×10^0

Tabla 5. Error medio en el intervalo de tiempo para el segundo experimento numérico.

Método	Nt	$Mean[Er_1(t)]$	$Mean[Er_2(t)]$	$Mean[Er_3(t)]$
EEM	10^4	3.4812×10^{-2}	2.1127×10^{-2}	3.4020×10^{-2}
	10^3	3.3458×10^{-2}	1.8862×10^{-2}	3.7059×10^{-2}
	10^2	1.4504×10^{-1}	3.9382×10^{-2}	1.6974×10^{-1}
	10^1	2.1166×10^0	2.9694×10^2	2.9702×10^2
IEM	10^4	3.3014×10^{-2}	2.0852×10^{-2}	3.2753×10^{-2}
	10^3	3.7917×10^{-2}	1.7166×10^{-2}	3.8073×10^{-2}
	10^2	2.5723×10^{-1}	3.6615×10^{-2}	2.6866×10^{-1}
	10^1	1.7666×10^0	1.9734×10^{-1}	1.7741×10^0

Para visualizar los resultados de las simulaciones del segundo experimento numérico con $Nt = 10^4$, se muestra la Figura 2, en donde se puede observar la evolución temporal de los valores esperados, así como cuatro (4) de las 5000 mil trayectorias estocásticas asociadas a cada sustancia. Nuevamente, se observa que la formulación del fenómeno a partir de las ecuaciones diferenciales de Itô ofrece una representación alternativa a la tradicional visualización con saltos de Poisson que describe la evolución temporal del fenómeno.

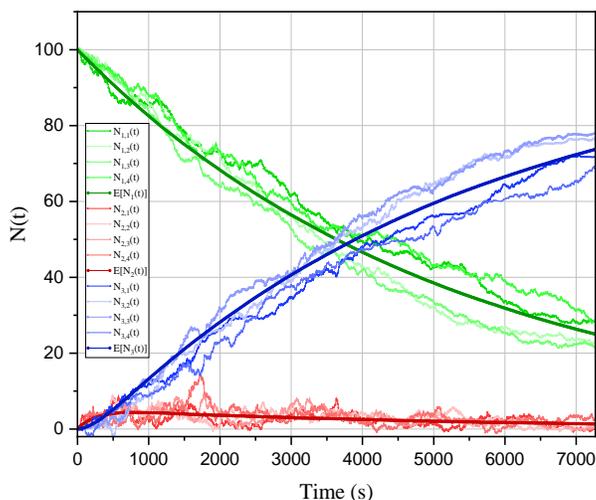


Figura 2. Evolución temporal del valor esperado y cuatro trayectorias estocásticas asociadas a las sustancias $^{212}_{83}\text{Bi}$, $^{208}_{81}\text{Tl}$ y $^{208}_{82}\text{Pb}$.

La evolución temporal de las distintas desviaciones se muestra en la Figura 3, es posible ver que la desviación tiende a cero para largos periodos de simulación ya que los valores de las desviaciones dependen de las concentraciones de sustancias inestables, las cuales tienden a cero para largos periodos de simulación, como se muestra en la ecuación (31). También es posible notar que la desviación asociada a N_3 presenta valores y tendencia similares a la desviación asociada con N_1 , es decir, la incertidumbre de N_3 captura directamente la incertidumbre transferida N_1 .

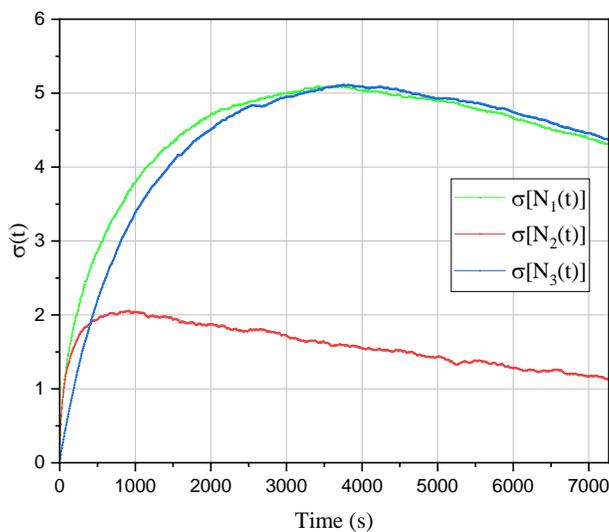


Figura 3. Evolución temporal de la desviación asociada a las concentraciones de las sustancias $^{212}_{83}\text{Bi}$, $^{208}_{81}\text{Tl}$ y $^{208}_{82}\text{Pb}$.

En la Figura 4 se muestran las frecuencias relativas representadas mediante histogramas normalizados creados con los valores de las 5000 trayectorias brownianas obtenidos en $t_{m\acute{a}x}$ para cada una de las tres sustancias cuando se implementa el método IEM, se observa poca incertidumbre y mayor precisión en el valor esperado para la sustancia N_2 cuando se compara con la sustancia N_1 y N_3 .

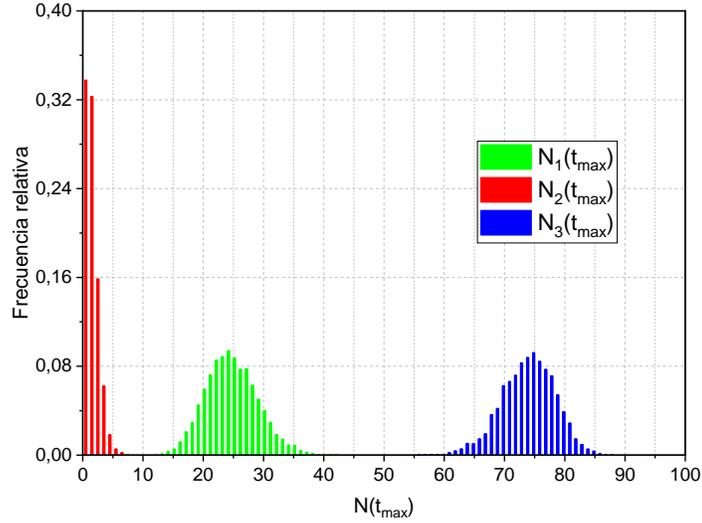
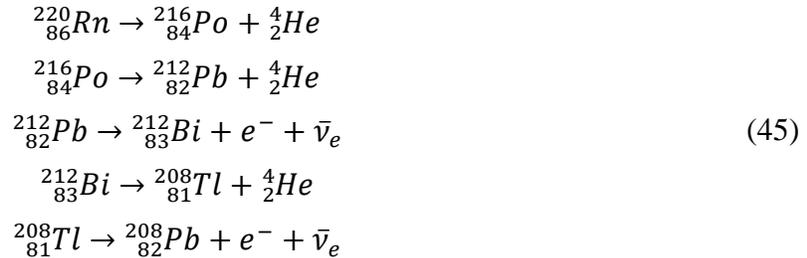


Figura 4. Frecuencia relativa en $t_{m\acute{a}x}$ para las sustancias ${}^{212}_{83}Bi$, ${}^{208}_{81}Tl$ y ${}^{208}_{82}Pb$.

Tercer experimento numérico

Para el tercer experimento numérico se considera un conjunto de seis sustancias que decaen como se muestra en las reacciones nucleares, debido a que el método EEM no produce resultados aceptables para ninguna configuración de este experimento numérico, solo se utiliza el método IEM dado por la ecuación (34).



La solución analítica del sistema o método de referencia para el tercer experimento numérico viene dada por la ecuación (5), donde ${}^{220}_{86}Rn = N_1$, ${}^{216}_{84}Po = N_2$, ${}^{212}_{82}Pb = N_3$, ${}^{212}_{83}Bi = N_4$, ${}^{208}_{81}Tl = N_5$ y ${}^{208}_{82}Pb = N_6$; las constantes de decaimiento de las sustancias antes mencionadas son: $\lambda_1 = 1.2464 \times 10^{-2} s^{-1}$, $\lambda_2 = 4.77 s^{-1}$, $\lambda_3 = 1.8092 \times 10^{-5} s^{-1}$,

$\lambda_4 = 1.9075 \times 10^{-4} s^{-1}$, $\lambda_5 = 3.783 \times 10^{-3} s^{-1}$ y $\lambda_6 = 0 s^{-1}$. Nuevamente se utilizan 5000 trayectorias Brownianas, la condición inicial se configura como $\mathbf{N}(0) = [100, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, el tiempo de simulación es $t_{m\acute{a}x} = 200 t_{\frac{1}{2}}(\frac{220}{86}Rn)$, con $t_{\frac{1}{2}}(\frac{220}{86}Rn) = 55.6 s$ y el número de particiones en el tiempo es $Nt = 10^3$.

Tabla 6. Comparación de valores esperados obtenidos en $t_{m\acute{a}x}$ para el tercer experimento numérico con distintas particiones en el tiempo.

Método	Nt	$E[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_2(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_3(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_4(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_5(t_{m\acute{a}x})]$	$E[N_6(t_{m\acute{a}x})]$
IEM	10^4	-1.8020×10^{-59}	-4.7209×10^{-62}	8.1807×10^1	7.3483	3.6525×10^{-1}	1.0480×10^1
	10^3	-1.3507×10^{-54}	-3.5386×10^{-57}	8.1895×10^1	7.3575	3.6726×10^{-1}	1.0380×10^1
	10^2	-8.4209×10^{-34}	-2.2061×10^{-36}	8.1941×10^1	7.2829	3.7477×10^{-1}	1.0401×10^1
	10^1	-2.1172×10^{-05}	-1.3728×10^{-07}	8.2054×10^1	7.0593	3.5615×10^{-1}	1.0530×10^1
Referencia		6.4110×10^{-59}	1.6796×10^{-61}	8.1895×10^1	7.3055	3.6703×10^{-1}	1.0432×10^1

La Tabla 6 muestra valores esperados de la concentración de las seis sustancias en el tiempo máximo. Cuando el número de particiones en la discretización del tiempo es grande, se obtienen aproximaciones de alta precisión al comparar con el método de referencia, sin embargo, se logran aproximaciones aceptables cuando se consideran pocas particiones en el tiempo, es decir, $Nt = 10$. Los valores negativos de la primera y segunda sustancia, denotadas como N_1 y N_2 , respectivamente, corresponden a errores de aproximación ya que los valores esperados de las concentraciones de estas sustancias tienden a ser muy cercanos a cero, es decir, las concentraciones de N_1 y N_2 , pueden considerarse casi inexistentes, por otra parte, N_3 , contiene alrededor del 80% de la concentración total.

La Tabla 7 registra los valores de las incertidumbres (cuantificadas mediante la desviación estándar) de las seis sustancias en el último instante de tiempo definido como $t_{m\acute{a}x}$. En la Tabla 7 los valores de las desviaciones $\sigma[N_1(t_{m\acute{a}x})]$ y $\sigma[N_2(t_{m\acute{a}x})]$ confirman la casi inexistencia de las sustancias N_1 y N_2 ; los valores de estas desviaciones son más cercanos a cero cuando el número de particiones en el tiempo es grande, así, además de mejorar la estimación de valores esperados como se muestra en la Tabla 6, considerar una mayor cantidad de particiones en el tiempo mejora notablemente las estimaciones de las desviaciones estándar.

Tabla 7. Valores de desviaciones estándar en $t_{m\acute{a}x}$ para el tercer experimento numérico con distintas particiones en el tiempo usando IEM.

Nt	$\sigma[N_1(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_2(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_3(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_4(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_5(t_{m\acute{a}x})]$	$\sigma[N_6(t_{m\acute{a}x})]$
10^4	2.5768×10^{-58}	6.7507×10^{-61}	3.8299	2.5841	6.2704×10^{-1}	3.0733
10^3	2.3084×10^{-53}	6.0477×10^{-56}	3.8718	2.6324	6.2073×10^{-1}	3.0772
10^2	2.4352×10^{-32}	6.3798×10^{-35}	3.8317	2.6166	5.6967×10^{-1}	3.0030
10^1	5.6945×10^{-03}	1.8824×10^{-05}	3.6744	2.4403	3.1827×10^{-1}	2.7015

La Tabla 8 y Tabla 9 muestran máximas diferencias y errores medios obtenidos en todo el intervalo de tiempo para las distintas configuraciones del experimento, se puede observar que la diferencia máxima en casi todas las variaciones de Nt se registra en las sustancias N_1 y N_3 , y en todos los casos, el valor máximo del error medio también se relaciona con estas mismas sustancias. Esto puede ser debido a la rigidez que impone al sistema la magnitud de la constante de decaimiento λ_1 y λ_3 , la rigidez se puede verificar al comparar las máximas diferencias obtenidas entre $Nt = 10^2$ y $Nt = 10^1$ pues se encuentra una aparente mayor precisión cuando $Nt = 10^1$, sin embargo, es posible que los cambios repentinos en la concentración de las sustancias a lo largo del tiempo puedan introducir errores de aproximación significativos en algunos instantes de tiempo particulares.

Tabla 8. Máximas diferencias en el intervalo de tiempo para el tercer experimento numérico.

Nt	$MaxD[Er_1(t)]$	$MaxD[Er_2(t)]$	$MaxD[Er_3(t)]$	$MaxD[Er_4(t)]$	$MaxD[Er_5(t)]$	$MaxD[Er_6(t)]$
10^4	1.2373×10^{-1}	3.7737×10^{-2}	1.2334×10^{-1}	7.0028×10^{-2}	2.1758×10^{-2}	6.2501×10^{-2}
10^3	2.3792×10^0	7.4116×10^{-3}	2.3863×10^0	7.9945×10^{-2}	2.0680×10^{-2}	7.1750×10^{-2}
10^2	1.6835×10^1	4.3922×10^{-2}	1.6903×10^1	7.5609×10^{-2}	1.2175×10^{-2}	5.6057×10^{-2}
10^1	6.7637×10^0	1.7574×10^{-2}	6.7708×10^0	3.4793×10^{-1}	2.2575×10^{-2}	2.9107×10^{-1}

Tabla 9. Error medio en el intervalo de tiempo para el tercer experimento numérico.

Nt	$Mean[Er_1(t)]$	$Mean[Er_2(t)]$	$Mean[Er_3(t)]$	$Mean[Er_4(t)]$	$Mean[Er_5(t)]$	$Mean[Er_6(t)]$
10^4	1.7799×10^{-3}	5.8821×10^{-5}	4.7842×10^{-2}	2.6222×10^{-2}	5.8260×10^{-3}	2.0683×10^{-2}
10^3	4.8303×10^{-2}	1.3517×10^{-4}	6.1180×10^{-2}	1.9315×10^{-2}	6.1004×10^{-3}	1.8027×10^{-2}
10^2	3.8339×10^{-1}	1.0025×10^{-3}	4.0955×10^{-1}	3.5900×10^{-2}	4.2555×10^{-3}	2.5632×10^{-2}
10^1	6.5779×10^{-1}	1.7175×10^{-3}	7.2652×10^{-1}	2.6223×10^{-1}	1.3639×10^{-2}	1.9570×10^{-1}

La Figura 5 muestra la evolución temporal del valor esperado de la concentración de las seis sustancias y se compara con la solución analítica de las ecuaciones de Bateman, se puede notar resultados con buena aproximación para valores de la concentración mayores a 10^0 , para valores menores, existen leves fluctuaciones en el valor esperado obtenido por el método propuesto debido a errores de aproximación; esto indica que se debe aumentar el número de particiones en el tiempo si se requiere mayor precisión.

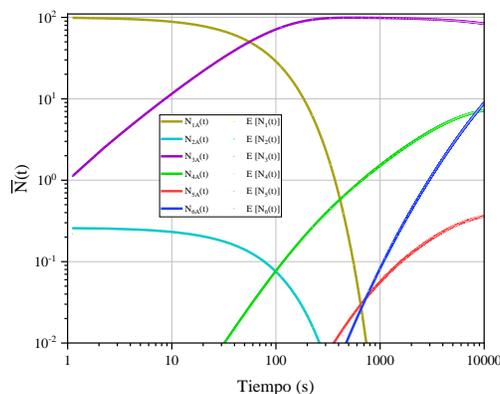


Figura 5. Valores esperados y método de referencia de las concentraciones de sustancias radiactivas para el tercer experimento numérico.

La Figura 6 se obtiene para el caso específico cuando se usa el método IEM con $N_t = 10^3$ es una representación más fiel del fenómeno estocástico porque muestra la evolución temporal de los valores esperados, así como la desviación estándar (mostrada por las regiones sombreadas) de las concentraciones en el intervalo de tiempo. La figura 6 también muestra que la solución a una variable aleatoria es una región en lugar de un punto, como en el caso de una variable determinista.

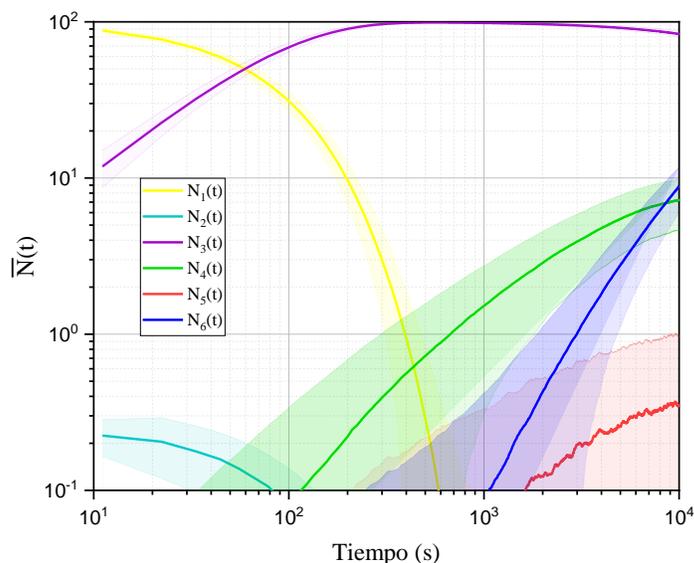


Figura 6. Evolución temporal de las concentraciones y desviaciones de las sustancias radiactivas para el tercer experimento numérico.

Cuarto experimento numérico

El cuarto experimento numérico es análogo al propuesto por (Zhou et al., 2015); sin embargo, se ignoran las ramificaciones del $^{212}_{83}Bi$ y se considera únicamente 11 sustancias de la serie de decaimiento $4n$ partiendo desde la sustancia $^{232}_{90}Th = N_1$ hasta la sustancia $^{208}_{82}Pb = N_{11}$ los distintos parámetros físicos de las sustancias involucradas en el experimento se registran en la Tabla 10. Debido a la extrema rigidez del experimento, solo se utiliza el método IEM. La rigidez es tal que la ecuación (5) e incluso la ecuación (6) tienen problemas de cómputo cuando se utiliza cálculos de doble precisión que consideran 16 cifras significativas. Debido a esto, en este experimento no se realizan comparaciones con el método de referencia; sin embargo, la condición inicial permite una rápida estimación del valor de la primera concentración, lo que permite la verificación del método.

Se utilizan 5000 trayectorias Brownianas, cada una con la condición inicial $N_1(0) = 100$ y $N_i(0) = 0$ para $i = 2, 3, 4, \dots, 11$; el tiempo máximo de simulación se establece en $t_{m\acute{a}x} = t_{\frac{1}{2}}(^{232}_{90}Th) = 1.40 \times 10^{10}$ años, se considera además $Nt = 10^3$ como el número de particiones en el tiempo.

Tabla 10. Símbolos de nucleidos, modo de decaimiento y constantes de decaimiento en la serie de desintegración del $^{232}_{90}\text{Th}$.

Símbolo	Nucleido	Modo de decaimiento	λ
N_1	$^{232}_{90}\text{Th}$	α	$1.568 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$
N_2	$^{228}_{88}\text{Ra}$	β^-	$3.819 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$
N_3	$^{228}_{89}\text{Ac}$	β^-	$3.130 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
N_4	$^{228}_{90}\text{Th}$	α	$1.1487 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$
N_5	$^{224}_{88}\text{Ra}$	α	$2.2084 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
N_6	$^{220}_{86}\text{Rn}$	α	$1.2464 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$
N_7	$^{216}_{84}\text{Po}$	α	$4.77 \times 10^0 \text{ s}^{-1}$
N_8	$^{212}_{82}\text{Pb}$	β^-	$1.8122 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
N_9	$^{212}_{83}\text{Bi}$	α	$1.9075 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
N_{10}	$^{208}_{81}\text{Tl}$	β^-	$3.783 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
N_{11}	$^{208}_{82}\text{Pb}$	Estable	0

La Tabla 11 muestra resultados de valores esperados y desviaciones estándar obtenidos mediante la implementación del método IEM, puede verse que las sustancias N_1 y N_{11} contienen la mayor parte de la concentración de las sustancias en el último instante de tiempo, se confirma además que el valor esperado de la concentración de la sustancia N_1 es aproximadamente el 50% del valor inicial. Esta cantidad representa el valor esperado teórico obtenido luego de que transcurre un tiempo equivalente al tiempo de vida media de la sustancia. Los valores en la desviación para N_1 y N_{11} en este instante de tiempo en particular corresponden al 10% del valor esperado de las sustancias en ese mismo instante de tiempo.

Tabla 11. Valores Esperados y desviaciones estándar para el cuarto experimento numérico.

N	$E[N_i(t_{\text{máx}})]$	$\sigma[N_i(t_{\text{máx}})]$
N_1	5.0193×10^1	4.9625×10^0
N_2	2.2106×10^{-08}	2.6917×10^{-7}
N_3	2.8795×10^{-12}	3.2779×10^{-11}
N_4	7.3485×10^{-9}	8.8038×10^{-8}
N_5	3.7833×10^{-11}	4.6354×10^{-10}
N_6	7.5266×10^{-15}	8.3619×10^{-14}
N_7	2.0044×10^{-17}	2.1981×10^{-16}
N_8	4.7261×10^{-12}	5.6801×10^{-11}
N_9	3.2945×10^{-13}	5.5374×10^{-12}
N_{10}	2.3092×10^{-14}	2.7394×10^{-13}
N_{11}	4.9807×10^1	4.9625×10^0

La Figura 7 muestra la evolución temporal de las 11 distintas concentraciones de sustancias en el intervalo de tiempo dado entre $0 \leq t \leq t_{\text{máx}}$, hay algunas fluctuaciones cuando los valores esperados alcanzan magnitudes muy cercanas a cero, lo que se debe al truncamiento que afecta los resultados después de alcanzar los límites de cómputo cuando se consideran 16 cifras significativas.

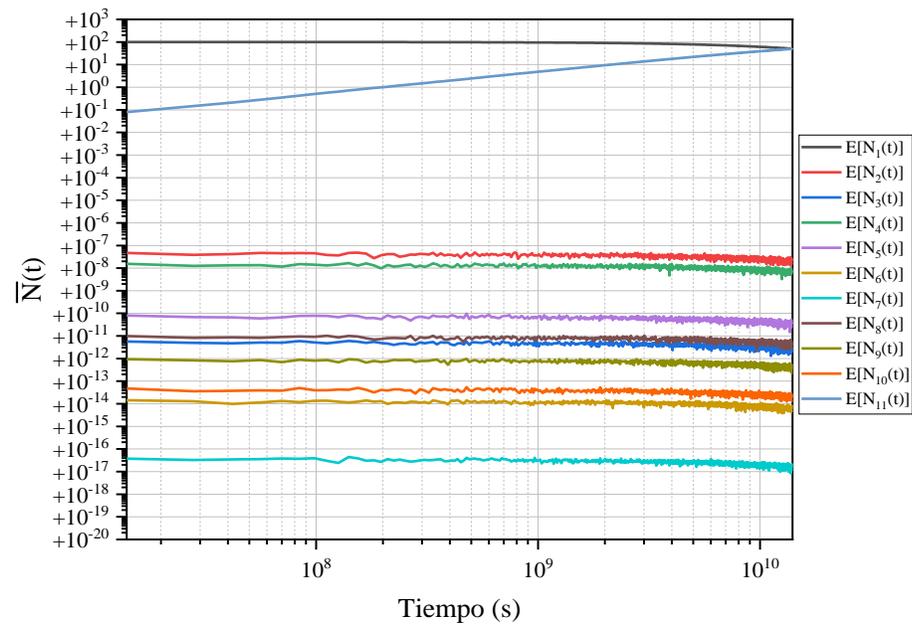


Figura 7. Valores esperados de las concentraciones de las sustancias en el cuarto experimento numérico.

Conclusiones

En el presente estudio se deducen las ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas al decaimiento radiactivo que generalizan las ecuaciones de Bateman, y se describen esquemas numéricos implícitos y explícitos de Euler-Maruyama que aproximan la solución a estas ecuaciones diferenciales estocásticas. Los resultados en valores esperados son consistentes con la solución analítica y determinista de las ecuaciones de Bateman. La capacidad de calcular incertidumbres y/o desviaciones asociadas a las diferentes concentraciones de sustancias es la contribución más significativa de la formulación estocástica de desintegración radiactiva. Un trabajo futuro podría involucrar ramificaciones en el desarrollo y análisis de ecuaciones del decaimiento radiactivo estocástico.

En cuanto a la solución numérica proporcionada por los métodos implícito y explícito de Euler-Maruyama, se recomienda utilizar en general el método implícito debido a la rigidez que puede existir en el problema cuando las constantes de decaimiento consideradas tienen un alto grado de variabilidad en su magnitud. En tales casos, el método implícito logra la precisión deseada mientras requiere un tiempo de cálculo significativamente menor al permitir pasos de tiempo más grandes.

Referencias

- Airey, P., Hinton, T., & Twining, J. (2012). The scientific basis. Radioactivity in the Environment, 1–57. <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-045016-2.00001-1>
- Al Nabhani, K. (2021). Applications of nuclear science and radioisotope technology in the industries, and in Environmental Sustainability. Applications of Nuclear and Radioisotope Technology, 109–159. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-821319-3.00007-5>
- Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). Mathematical methods for physicists a comprehensive guide. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-30629-7>
- Bateman, H. (1910). The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations. Proc. Cambridge Philos. Soc. 15, 423–427.
- Burden, R. L., Faires, D. J., & Burden, A. M. (2017). Análisis numérico (10a. Ed.). CENGAGE Learning.
- Cai, Y., Peng, X., Li, Q., Du, L., & Yang, L. (2019). Solving point burnup equations by Magnus method. Nuclear Engineering and Technology, 51(4), 949–953. <https://doi.org/10.1016/j.net.2019.01.006>
- Cetnar, J. (2006). General solution of Bateman equations for nuclear transmutations. Annals of Nuclear Energy, 33(7), 640–645. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2006.02.004>
- Crawford-Brown, D. (2011). Sources, risks, and mitigation of radioactivity in water. Treatise on Water Science, 59–67. <https://doi.org/10.1016/b978-0-444-53199-5.00051-8>
- Cruz-López, C.-A., Espinosa-Paredes, G., & François, J.-L. (2022). Development of the general Bateman solution using fractional calculus: A theoretical and algorithmic approach. Computer Physics Communications, 273, 108268. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108268>
- Côté, B., Yagüe, A., Világos, B., & Lugaro, M. (2019). Stochastic chemical evolution of radioactive isotopes with a Monte Carlo approach. The Astrophysical Journal, 887(2), 213. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab5a88>
- Dreher, R. (2013). Modified bateman solution for identical eigenvalues. Annals of Nuclear Energy, 53, 427–438. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.06.019>
- Elias, S. A. (2015). History of quaternary science. Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-409548-9.09548-8>
- Gharibreza, M., Zaman, M., Arabkhedri, M., & Sobh-Zahedi, S. (2022). The off-site implications of deforestation on sedimentation rates and pollution in ABKENAR Open Water (anzali lagoon, Caspian Sea) using radionuclide techniques and sediment quality indices. International Journal of Sediment Research, 37(3), 370–382. <https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2021.08.006>
- Halász, M., & Szieberth, M. (2018). Markov chain models of nuclear transmutation: Part I – theory. Annals of Nuclear Energy, 121, 429–445. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.07.010>

- Hayes, J. G., & Allen, E. J. (2005). Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, 32(6), 572–587. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2004.11.009>
- Isotalo, A. E., & Aarnio, P. A. (2011). Comparison of depletion algorithms for large systems of nuclides. *Annals of Nuclear Energy*, 38(2-3), 261–268. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2010.10.019>
- Kastanya, D. (2022). On the use of average power in predicting radioisotope productions. *Annals of Nuclear Energy*, 165, 108648. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108648>
- Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). Numerical solution of stochastic differential equations. Springer Berlin / Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
- Kondev, F. G., Wang, M., Huang, W. J., Naimi, S., & Audi, G. (2021). The NUBASE2020 evaluation of nuclear physics properties *. *Chinese Physics C*, 45(3), 030001. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/abddae>
- Ladshaw, A., Wiechert, A. I., Kim, Y.-ha, Tsouris, C., & Yiacoumi, S. (2020). Algorithms and algebraic solutions of decay chain differential equations for stable and unstable nuclide fractionation. *Computer Physics Communications*, 246, 106907. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2019.106907>
- Lawson, S. L., Maurice, S., Belian, R. D., Elphic, R. C., Moore, K. R., Lawrence, D. J., & Feldman, W. C. (2005). Recent outgassing from the lunar surface: The lunar prospector alpha particle spectrometer. *Journal of Geophysical Research*, 110(E9). <https://doi.org/10.1029/2005je002433>
- Marguet, S. (2017). *The physics of nuclear reactors*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-59560-3>
- Massey, F., & Prentis, J. (2014). Power law approximations for radioactive decay chains. *Applied Mathematics and Computation*, 245, 135–144. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.048>
- Milstein, G. N., & Tretyakov, M. V. (2004). *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*. Springer Berlin / Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9>
- Müller, E. (2018). Essentially nonnegative matrix exponential methods for nuclide transmutation. *Annals of Nuclear Energy*, 120, 611–624. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.06.012>
- Povinec, P. P., Hirose, K., & Aoyama, M. (2013). Fukushima radioactivity impact. *Fukushima Accident*, 131–275. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-408132-1.00005-x>
- Prettyman, T. H. (2014). Remote Sensing of chemical elements using nuclear spectroscopy. *Encyclopedia of the Solar System*, 1161–1183. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-415845-0.00054-2>
- Pusa, M. (2011). Rational approximations to the matrix exponential in burnup calculations. *Nuclear Science and Engineering*, 169(2), 155–167. <https://doi.org/10.13182/nse10-81>
- Pusa, M., & Leppänen, J. (2010). Computing the matrix exponential in burnup calculations. *Nuclear Science and Engineering*, 164(2), 140–150. <https://doi.org/10.13182/nse09-14>

- Raj, D., & Kannan, U. (2021). Development of computer code ADWITA and data library for the solution of transmutation chain equations and application to the analysis of nuclear fuel cycles. *Annals of Nuclear Energy*, 164, 108619. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108619>
- Sauer, T. (2018). *Numerical analysis*. Pearson.
- Scott, B. R. (2014). Radiation Toxicology, ionizing and nonionizing. *Encyclopedia of Toxicology*, 29–43. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-386454-3.00057-9>
- She, D., Liu, Y., Wang, K., Yu, G., Forget, B., Romano, P. K., & Smith, K. (2013). Development of burnup methods and capabilities in Monte Carlo code RMC. *Annals of Nuclear Energy*, 51, 289–294. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.07.033>
- She, D., Liu, Y., Wang, K., Yu, G., Forget, B., Romano, P. K., & Smith, K. (2012). Development of burnup methods and capabilities in Monte Carlo code RMC. *Annals of Nuclear Energy*, 51, 289–294. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.07.033>
- Sitek, A., & Celler, A. M. (2015). Limitations of poisson statistics in describing radioactive decay. *Physica Medica*, 31(8), 1105–1107. <https://doi.org/10.1016/j.ejmp.2015.08.015>
- Soria, F. A. (2015). *Física nuclear y de partículas*. Publicacions de la Universitat de València.
- Szymczak, R. (2012). Tropical radiochemical oceanography. *Radioactivity in the Environment*, 121–153. <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-045016-2.00004-7>
- Tadepalli, S. C., & Subhash, P. V. (2018). Simplified recursive relations for the derivatives of Bateman linear chain solution and their application to sensitivity and multi-point analysis. *Annals of Nuclear Energy*, 121, 479–486. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.08.004>
- Thibes, R., & de Oliveira, S. L. (2014). General solution to Bateman's differential equations with direct index notation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 93(6). <https://doi.org/10.12732/ijpam.v93i6.11>
- Zanco, P., Zaroccolo, M., & Ave, S. (2019). Radionuclides diagnostic techniques. *Critical Care Nephrology*. <https://doi.org/10.1016/b978-0-323-44942-7.00036-4>
- Zhou, Z., Yan, D., Zhao, Y., & Chai, Z. (2015). Kinetics analysis and quantitative calculations for the successive radioactive decay process. *Nuclear Physics A*, 933, 143–153. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2014.11.001>