



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, _____ 22/02/2024 _____

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

_____ Brayan Stiven Castiblanco Salas _____, con C.C. No. _____ 1005715176 _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,
_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado _____

titulado ___ Black-bounce como solución al problema de las singularidades de los agujeros
negros _____

presentado y aprobado en el año _____ 2024 _____ como requisito para optar al título de

_____ Físico _____;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: BLACK-BOUNCE COMO SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS SINGULARIDADES EN LOS AGUJEROS NEGROS

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Castiblanco Salas	Brayan Stiven

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cañate Casseres	Pedro Mario

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: FÍSICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: FÍSICA

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2024 NÚMERO DE PÁGINAS: 61

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas__x_ Fotografías__x_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general__x_ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros__x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno

MATERIAL ANEXO: <https://github.com/Kzsti/Invariantes-de-Curvatura-y-Tensor-de-Einstein>

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria): Ninguno

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Agujero negro	<u>Black bounce</u>	6. _____ Variedad _____	_____
2. ---Relatividad--	_____	7. _____ Curvatura _____	_____
3. _____ Tensor _____	_____	8. _____ Vectores _____	_____
4. _____ métrica _____	_____	9. _____ Geodesicas _____	_____
5. _____ Energía _____	_____	10. _____ singularidad _____	_____

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Este estudio se centra en la teoría general de la relatividad y los enigmáticos agujeros negros. Se analiza el teorema de singularidad de R. Penrose y la problemática asociada en esta teoría. La solución propuesta implica la construcción teórica de espacios-tiempo donde los agujeros negros son esféricos, estáticos y sin singularidad. Son conocidos como "black-bounce".



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This study focuses on the general theory of relativity and the enigmatic black holes. R. Penrose's singularity theorem and the associated issues in this theory are analyzed. The proposed solution involves the theoretical construction of spacetimes where black holes are spherical, static, and without singularity. They are known as "black-bounce".

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Nombre Jurado: Oscar Londoño

Firma: Oscar M. Londoño D.

Nombre Jurado: Hernando Gonzales

Firma: Hernando Gonzalez

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
FÍSICO(A)

Desarrollado por: Brayan Stiven Castiblanco Salas

Código: 20191178733

Firma:

Director: PhD. Pedro Mario Cañate Casseres

Firma:

Area: Relatividad General

**BLACK-BOUNCE COMO SOLUCIÓN AL
PROBLEMA DE LAS SINGULARIDADES EN
LOS AGUJEROS NEGROS**

Neiva-Huila
Febrero 06, 2024

DEDICATORIA

Para mis padres, Hugo Castiblanco y Liliana Salas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por brindarme la paciencia, sabiduría e inteligencia para poder llevar a cabo este trabajo. También a mi familia, que ha sabido aguantarme.

Agradezo a mi tutor Dr. Pedro Cañate por sus enseñanzas y el acompañamiento para el desarrollo de esta tesis.

Dr. Hernando Gonzáles, Dr. Oscar Londoño. Gracias, por estar atentos a mi revisión así como a la evaluación de este trabajo.

RESUMEN

Este estudio se centra en la teoría general de la relatividad y los enigmáticos agujeros negros. Se analiza el teorema de singularidad de R. Penrose y la problemática asociada en esta teoría. La solución propuesta implica la construcción teórica de espacios-tiempo donde los agujeros negros son esféricos, estáticos y sin singularidad. Son conocidos como “black-bounce”.

ABSTRACT

This study focuses on the general theory of relativity and the enigmatic black holes. R. Penrose's singularity theorem and the associated issues in this theory are analyzed. The proposed solution involves the theoretical construction of spacetimes where black holes are spherical, static, and without singularity. They are known as "black-bounce".

CONVENCIONES Y NOTACIÓN

En este trabajo se utilizará para todo tipo de calculo tensorial el convenio de Einstein, y se usan unidades geometrizadas ($C=1$, $G=1$).

La signatura utilizada para la métrica es $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ o en otros textos conocida como $(-, +, +, +)$.

Representaremos los vectores o tensores covariantes de la siguiente manera (x_μ) , (T_μ) y los vectores o tensores contravariantes de la siguiente manera (x^μ) , (T^μ) .

Definimos otros simbolos utilizados en este trabajo.

- Γ Simbolo de Christoffel.
- $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ Tensor de Riemann, $R_{\mu\nu}$ Tensor de Ricci, R Escalar de Ricci.
- ∂_μ Derivada parcial, ∇_μ Derivada covariante.
- K Invariante de Kretschmann.
- $G_{\mu\nu}$ Tensor de Einstein.
- \mathcal{M} Variedad.

Índice general

1. Introducción	9
2. Marco teórico	11
2.1. Tiempo y Espacio	11
2.1.1. Relatividad Especial	11
2.1.2. Relatividad general	13
2.2. La métrica	15
2.3. Variedad diferencial	16
2.3.1. Vectores y Tensores	17
2.3.2. Tensor métrico	19
2.4. Curvatura	20
2.4.1. “Conexión” y Geodésicas	20
2.4.2. Tensor de Riemann	22
2.5. Ecuaciones de Einstein	22
2.5.1. Física en espacio-tiempos curvados	22
2.5.2. Condiciones de energía	24
2.6. Agujeros negros	27
2.6.1. La métrica de Schwarzschild	27
2.6.2. Teorema de Birkhoff	28
2.6.3. Singularidades e invariantes de curvatura	28
2.6.4. Teorema de singularidad de Penrose (1965)	29
2.7. Agujeros negros del tipo “black-bounce”	30
2.7.1. Agujeros negros regulares	30
2.7.2. Agujero de gusano (Morris-Thorne)	31
3. Metodología	32
3.1. Cálculo de invariantes de curvatura para Agujeros negros esféricos estáticos	32

3.1.1. Métrica Schwarzschild	33
3.2. Tensor energía-momento para Schwarzschild	37
3.2.1. Métrica de Reissner-Nordström	38
3.3. Tensor energía-momento para Reissner-Nordström	42
3.4. Cálculo de invariantes de curvatura para agujeros negros de tipo “black bounce” esféricos estáticos	42
3.4.1. Métrica de Simpson-Visser	43
3.5. Tensor energía-momento para Simpson-Visser	47
3.5.1. Métrica de “black-bounce” Reissner-Nordstrom-Simpson-Visser	48
3.6. Tensor energía-momento para “black-bounce” Reissner-Nordström-Simpson-Visser	49
4. Resultados	51
4.1. Resultados geométricos	51
4.2. Resultados físicos	53
4.3. Mostrando una fuente generadora	54
5. Conclusiones	55
Bibliografía	57
Anexos	60

Índice de figuras

2.1. Sistema de coordenadas Galileanas, donde p y q son eventos distintos ocurriendo al mismo tiempo.	12
2.2. Cono de luz (2D) con sus posibles eventos causales.	14
2.3. Espacio-tiempo de Minkowski (2D) con su elemento de línea entre dos eventos causales en un plano suave e infinito.	15
2.4. Coordenadas cartesianas y esféricas (2D), ambas equivalentes al trazar dos puntos en un plano y sus distancias. 10	16
2.5. Geodésica y transporte paralelo.	21
2.6. Condiciones de energía y su relación.	26
2.7. Agujero de gusano Morris-Thorne	31

Capítulo 1

Introducción

Existe una creencia errónea respecto a lo que significa una singularidad en un agujero negro. Desde los primeros días de la teoría de la relatividad desarrollada por Einstein y su posterior ampliación por Schwarzschild, se han estudiado ciertas regiones en las cuales el espacio-tiempo se comportaría de una manera que la teoría de la relatividad general clásica no podría describir, mostrando un comportamiento singular. Aquí es donde se encontró un desafío directo para esta teoría, lo que llevó a la proposición de nuevos modelos para su completitud. Incluso se llegó a intentar evitar las singularidades o a intentar consolidar la teoría general de la relatividad con la mecánica cuántica, buscando una formulación cuantizada de la gravedad para tratar de eliminar estas singularidades.

Desde 1916 hasta 1965 se pudo ver un avance con respecto al tema de las singularidades y su comprensión, y finalmente con el trabajo de Penrose [16] se logró llegar a una forma generalizada de describir el colapso de una estrella formando el agujero negro y su “inevitable” formación de la singularidad en los llamados teoremas de singularidad. No obstante, a finales de los 60 surgieron nuevas formas de desarrollar el problema de las singularidades en los agujeros negros. Fue por estas fechas donde Bardeen mostró la primera solución de un agujero negro regular, lo que inspiraría a construir un sinnúmero de alternativas de agujeros negros que no contarán con singularidad. Recientemente se lograría una solución de agujero negro con la particularidad de que cambiando un parámetro, este podría ser un agujero negro regular del tipo de Bardeen o un agujero de gusano de tipo Morris-Thorne [15]; Estos llamados “black-bounce” por etapas intermedias que pasan por un “rebote negro”

(hacia una futura encarnación del universo), un “rebote nulo” extremo (hacia una futura encarnación del universo). [19](#).

Por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo es construir matemáticamente soluciones de agujeros negros esféricos y estáticos de tipo “black-bounce”. Además, como objetivos específicos se muestra una fuente física generadora para dichas soluciones y se propone desarrollar el tema del problema de las singularidades planteadas por Penrose.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se discutirá todo lo relacionado con los fundamentos para entender la relatividad general, así como el entendimiento de lo que son los diferentes agujeros negros junto con las partes que estos tienen y sus respectivas singularidades, además de algunos temas necesarios para entender la metodología de desarrollo.

En el capítulo 3 se presentará la solución para la construcción de agujeros negros esféricos y estáticos de tipo “black-bounce”. En el capítulo 4 se presentarán los resultados obtenidos del trabajo y, finalmente, en el capítulo 5 se expondrán las conclusiones, que abordarán la explicación de la fuente física generadora en la que se presenta un “black-bounce”, junto con el análisis del problema de las singularidades de Penrose.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Tiempo y Espacio

Explicaremos de manera detenida lo relacionado con el espacio y el tiempo de manera clásica, y pasaremos a dar una breve explicación de lo que nos enseñan de relatividad especial de manera breve para así entender mejor la evolución de la idea del espacio-tiempo que tanto se usa en relatividad general. Se tratará de enfocar más de una manera explicativa, así como todo lo relacionado al trabajo.

2.1.1. Relatividad Especial

Para entender la relatividad general, es necesario comprender lo que significa para nosotros, como físicos, el espacio y el tiempo. Desde la época de Galileo, se creía que tanto el espacio como el tiempo eran entidades separadas. Además, se creía que el tiempo era algo absoluto y, si analizamos un sistema de coordenadas galileanas O , tendría que ser exactamente igual cualquier suceso físico que ocurriera en un sistema de coordenadas O' y viceversa (siempre y cuando O' sea un sistema libre de rotación y con velocidad uniforme con respecto a O).

Estas transformaciones se escriben de la siguiente manera [\[7\]](#).

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

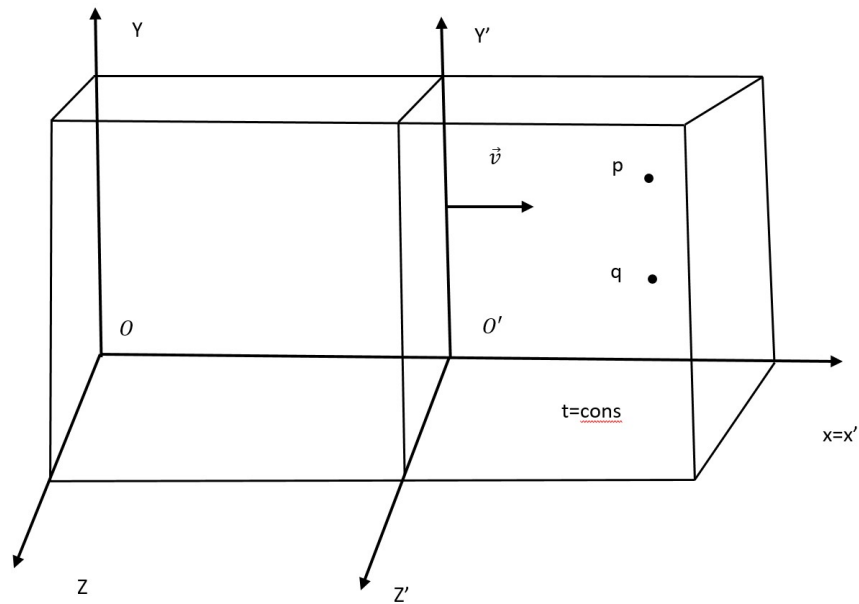


Figura 2.1: Sistema de coordenadas Galileanas, donde p y q son eventos distintos ocurriendo al mismo tiempo.

Todo esto era como se concebía el tiempo y el espacio anteriormente. Se creía que el significado de los datos temporales era absoluto, es decir, independiente del estado de movimiento del cuerpo en referencia. No obstante, en 1905, un trabajo publicado por A. Einstein cambiaría el rumbo del pensamiento sobre el tiempo y el espacio. Su profesor, H. Minkowski, uniría y le daría un nuevo uso al espacio y al tiempo, proponiendo un desarrollo geométrico para dar explicación a fenómenos que, con anterioridad, no se podrían resolver con el concepto clásico. El trabajo de Einstein fue influenciado por el trabajo de Planck, Maxwell, Faraday, Michelson y Morley, entre otros grandes físicos y matemáticos. En general, del electromagnetismo, ya que sentaron las bases para el concepto de la luz en el vacío y el apoyo experimental para sostener la teoría restringida de la relatividad. Se corrigieron y agregaron conceptos como el de la simultaneidad, la equivalencia de la masa inercial y masa pesada, la energía, junto con el nuevo concepto del campo gravitatorio. Con un nuevo sistema de coordenadas, el espacio y el tiempo se unirían, formando lo que ahora conocemos como espacio-tiempo. Teniendo todas las características descritas anteriormente y, principalmente gracias a la investigación del experimento de Michelson y Morley, se logró construir

las transformaciones de Lorentz.

Con el nuevo sistema espacio-temporal, podemos permitirnos decir que si tenemos un sistema de coordenadas inerciales semejantes O y O' , y ocurre un evento p , un observador en O con coordenadas (t, x, y, z) y otro observador O' con coordenadas (t', x', t', z') ue se mueve con velocidad \vec{v} en dirección x , pasando por el observador O , entonces las coordenadas O' a partir de las transformaciones de Loretz vendrían escritas de la siguiente manera [7].

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Con esto planteado, el espacio-tiempo se puede graficar como una nueva coordenada y además podemos resolver que el tiempo en que viaja un rayo de luz no sea un problema multiplicando esto por c , es por eso que existirá una nueva coordenada ct y un nuevo concepto, el tiempo luz (eliminando la c de nuestro sistema).

Este diagrama tiene información sobre la geometría del espacio-tiempo y los diferentes tipos de conexiones entre los eventos que estas pueden seguir en dos sistemas de coordenadas inerciales. Estas regiones son llamadas de **tipo luz**, tipo espacio, tipo tiempo. Cuando la partícula u observador se encuentra en la trayectoria nula del espacio-tiempo, este se situará en los bordes del cono, como la luz, de ahí su nombre y esta tiene que ser un rayo de luz, ya que ningún observador puede viajar más rápido que la luz. Cuando la partícula u observador se encuentra en la trayectoria negativa, se encontrará dentro de la zona verde y es de **tipo tiempo**, donde en sistema de referencia puede ocurrir que dos eventos ocurran en el mismo lugar en distintos tiempos. Cuando la partícula u observador se encuentra en la trayectoria positiva, es de **tipo espacio** y es todo lo que está por fuera del cono de luz.

2.1.2. Relatividad general

Una vez entendido el concepto de espacio-tiempo, se comenzó a generalizar más sobre esta nueva física, teniendo nuevos entendimientos de fenómenos que ya se tenían; como la gravedad. Tenemos que decir que, así como en la

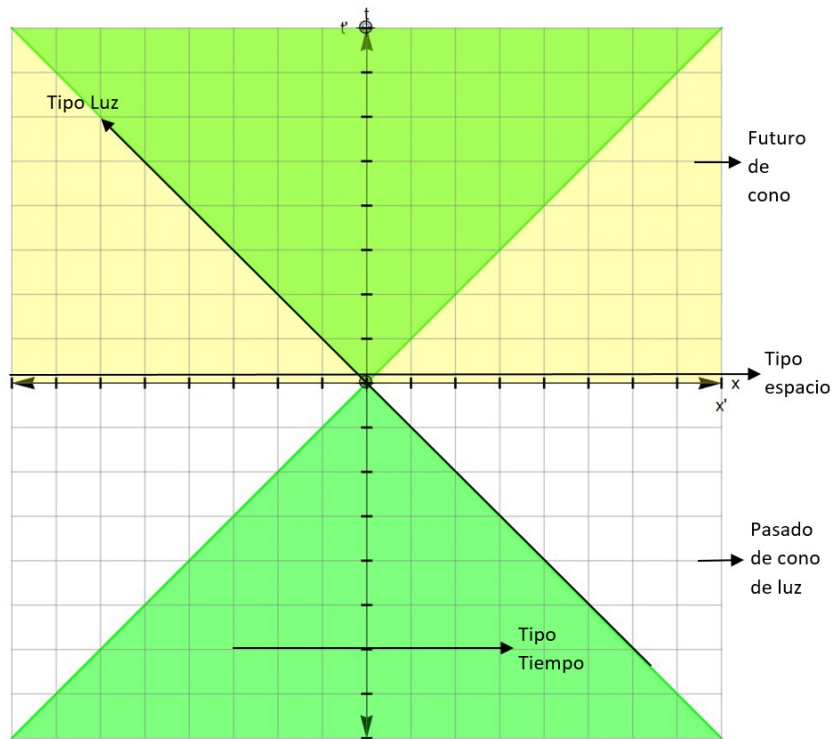


Figura 2.2: Cono de luz (2D) con sus posibles eventos causales.

teoría de Newton se decía que *tempus est absolutum y spatium est absolutum*, en términos de la teoría de la relatividad se puede traducir *continuum spatii et temporis est absolutum*. Y cuando nos referimos a *absolutum* en esa última palabra, no sólo decimos “físicamente real”, sino también “independientes de sus propiedades físicas pero no siendo, él mismo, influido por las condiciones físicas”. Esto es importante porque gracias al principio de equivalencia sabemos que la igualdad de la masa inerte y de la masa gravitatoria, que en la mecánica newtoniana tenían distinta definición, afirma que la aceleración impartida a un cuerpo por un campo gravitatorio es independiente de la naturaleza del cuerpo. Esto principalmente nos indica que la presencia de curvatura en el espacio-tiempo es la causante de la gravedad, y no una fuerza como se planteaba anteriormente.

2.2. La métrica

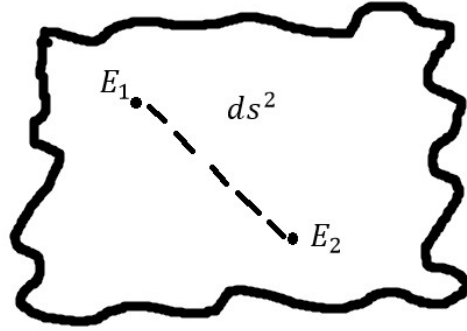


Figura 2.3: Espacio-tiempo de Minkowski (2D) con su elemento de línea entre dos eventos causales en un plano suave e infinito.

Las trayectorias del espacio-tiempo están relacionadas con distancias en geometrías euclidianas o no euclidianas (geometrías Riemannianas), en las cuales se puede analizar todo lo descrito anteriormente. Se escribe en su forma infinitesimal la métrica de H. Minkowski de la siguiente manera []:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Donde ds^2 sería el elemento de línea que describiría una trayectoria (siendo $ds^2 = 0$ para trayectorias tipo luz, $ds^2 < 0$ para trayectorias tipo tiempo y $ds^2 > 0$ para trayectorias tipo espacio). La métrica, por propósitos del principio de equivalencia y la geometría que tienden a tener los objetos estelares, es de geometría esférica. Reescribiendo la ecuación anterior:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Un ejemplo visual de estas dos geometrías se puede ver ilustrado en la siguiente imagen.

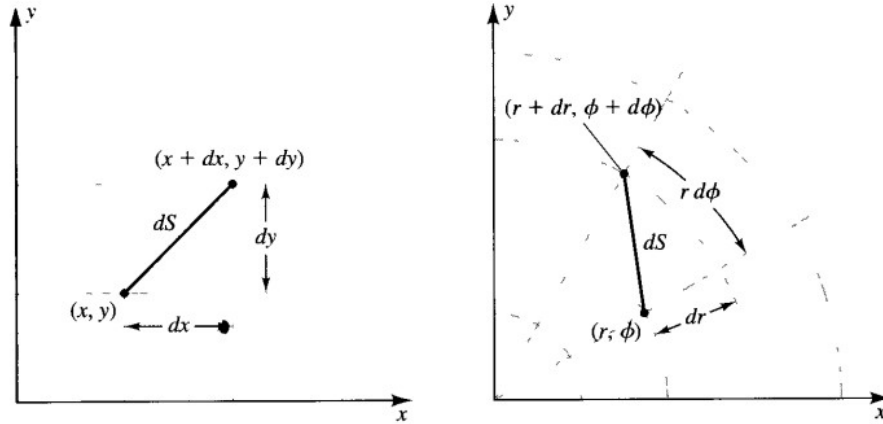


Figura 2.4: Coordenadas cartesianas y esféricas (2D), ambas equivalentes al trazar dos puntos en un plano y sus distancias. [10](#)

2.3. Variedad diferencial

Para empezar a entender un poco más de la matemática usada en el tema de la relatividad general, se necesita entender el por qué se usan variedades matemáticas para describir los comportamientos de esta física. En principio, si podemos considerar el espacio-tiempo en escalas muy pequeñas, se comportará como la métrica que describimos anteriormente (Minkowski). Sin embargo, si consideramos un espacio-tiempo más global, podremos ver una curvatura que es causada por la presencia de materia que hay en el espacio-tiempo.

Una analogía buena para entender esto es que si un barco desea desplazarse hacia el horizonte con la idea de viajar a otro lugar donde no haya estado, se va a dar cuenta de que va a volver al mismo lugar y se encontrará con que la tierra no es plana (con motivos de ofender a los terraplanistas). Entonces, encontraremos un área de estudio matemática que tiene como nombre topología y en la que la variedad hace parte como objeto geométrico. Esta nos ayudará a generalizar espacios en distintas dimensiones y a hacer transformaciones que se mantendrán invariantes. Es por esto que es de gran interés en esta rama de la física, ya que el espacio-tiempo existirá en diferentes geometrías con distintas dimensiones. En específico, para el espacio-tiempo de Minkowski pertenecería a un espacio real de 4 dimensiones \mathbb{R}^4 . [7](#)

$$\mathcal{M} = \{(t, x, y, z) | (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$$

La idea general del por qué se usa esta área de la matemática es porque nos ayuda a hacer una descripción de la geometría usando el cálculo que ya conocemos, diferencial e integral, para la especificación de todo tipo de geometrías. Es por esto que también tiene como nombre esta área de las matemáticas como geometría diferencial.

2.3.1. Vectores y Tensores

Los vectores son objetos matemáticos que en un principio conocemos como algo con magnitud y dirección. Sin embargo, son algo más abstracto que esa definición y también son utilizados para escribir espacio-tiempo como los de Minkowski, es por esto que necesitamos describir para qué nos sirven los vectores y tensores en el estudio de nuestros espacio-tiempos. Empezando por los vectores, a pesar de que son muy usados en física aquí tendrán una diferencia primordial y es que serán quadri-vectores, tendremos una componente más que describirá la dirección de nuestro vector, aunque en esencia son lo mismo tendrán una pequeña diferencia; por ejemplo, los quadri-vectores no tienen tal cosa como el producto cruz, y abandonaremos la idea de posición y desplazamiento ya que no es una idea local en este tema. Ahora bien, también tenemos que tener en cuenta la curvatura, cosa de la que aún no se ha hablado, pero si tenemos en cuenta lo hablado anteriormente en la geometría diferencial, nos encontraremos con espacio-tiempo más complejos en donde las distancias no serán equivalentes para toda base de vectores.

Para no extendernos mucho, diremos que un vector está bien definido ya que habrá un campo de vectores definido $a = a(x)$, y también existirá su descomposición de este vector en las componentes respectivas, lo que será un uso de la base vectorial. Una base es cualquier vector que expanda el espacio vectorial, y podremos expresar esto con el convenio de Einstein de tal forma que. 10

$$a(x) = a^\alpha(x)e_\alpha(x)$$

De los sub y supraíndices hablaremos más adelante. Podemos, con ayuda del producto escalar, definir bases ortonormales que son de ayuda para espacios-tiempos planos como el de Minkowski, tal que:

$$e(x)_\alpha \cdot e(x)_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

Donde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Está sera la base de la forma tensorial del espacio-tiempo de Minkowski, aunque ya hablaré de esto.

Los tensores son vectores de rango 1. Pero antes de hablar de lleno de los tensores, explicaremos la base dual junto con los índices que vimos en las ecuaciones anteriores. La base dual, como su nombre indica, es una base que se usa como elemento matemático para describir cambios en una base normal y así poder decir los cambios que esta tuvo con respecto a la variación de la base normal. Son como dos mapas en donde podemos decir que tanto cambian unas de otras, básicamente. Es por esto que decimos que cuando aumenta la norma de la base normal, las componentes disminuyen, y cuando disminuyen la norma de la base dual, los componentes aumentan. De ahí que digamos que cuando los índices están abajo, covarían, y cuando están arriba, contravarian. Ver más en [7].

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow \text{Base Normal}$$

$$\vec{v} = v_\alpha \vec{e}^\alpha \rightarrow \text{Base Dual}$$

Pues ahora bien, en los tensores pasa lo mismo que en los vectores (ya que técnicamente son lo mismo), pero se generaliza para poder trabajar con invariantes y poder transformarlas sin que nos dé ningún tipo de problema al trabajar con ellas. Básicamente, ese es el uso del tensor, y lo necesitaremos para la métrica.

Definimos al rango de los tensores como el número de vectores que tiene cada tensor de la base.

$$\vec{e}_\alpha \rightarrow \text{Rango 1 (Vector)}$$

$$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \rightarrow \text{Rango 2}$$

$$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}_\gamma \dots \rightarrow \text{Rango n}$$

Hay que tener en cuenta que este círculo con la equis se le denomina producto tensorial, y sus bases no se pueden conmutar, a diferencia de los productos usados normalmente en álgebra lineal.

2.3.2. Tensor métrico

Sí quisieramos contruir una métrica donde podemos trabajar con la matemática tensorial, tenemos que definir a la metrica como: [10](#)

$$g_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \vec{e}^0 & \vec{e}_0 \vec{e}^1 \\ \vec{e}_1 \vec{e}^0 & \vec{e}_1 \vec{e}^1 \end{pmatrix} = \vec{e}_{\alpha} \vec{e}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

Donde δ_{α}^{β} será el tensor fundamental y tiene la siguiente característica.

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

El principio de equivalencia sugiere que en ciertas regiones de la curvatura existirán propiedades locales donde en ciertos puntos el espacio-tiempo plano será igual o, mejor dicho, indistinguible. Esto se le denomina marco de referencia inercial.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Si se necesita un explicación más rigurosa se puede encontrar en [7](#), [10](#)

Entonces, podemos describir nuestras métricas en forma tensorial. Esto nos ayudará a describir la física sin tener que preocuparnos de alterar o hacer malos cálculos matemáticos y además de hacerlo de forma más general. Un ejemplo de esto es la métrica en coordenadas esféricas con sus cuadri-coordenadas x^{α} .

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Esta metrica se puede escribir con sus componentes diagonales, como ya hicimos anteriormente con minkowski en coordenadas cartesianas. De modo

que $g_{\alpha\beta}(x) = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$, y como matriz simétrica 4×4 tendrá 10 componentes independientes. Hay que tener en cuenta que la forma de la métrica $g_{\alpha\beta}$ será diferente para la misma geometría dependiendo de las coordenadas utilizadas.

2.4. Curvatura

Generalmente, uno sabe de manera intuitiva lo que la curvatura es, ya que podemos imaginar en nuestro espacio de tres dimensiones. Claramente, luego de lo explicado anteriormente, podemos ver que la curvatura está relacionada con la métrica que, a fin de cuentas, es la que define nuestra variedad. Hay que tener muy presente que la masa y la energía serán la fuente de esta curvatura, la cual estará caracterizada por el tensor de curvatura de Riemann. Pero hay que tener en cuenta otras cosas para saber cómo trabajar en esta curvatura.

2.4.1. “Conexión” y Geodésicas

Todas las formas en las que la curvatura se hace presente se pueden observar en algo que se llama “conexión”. Esta conexión nos dará información de vectores que se encuentran en espacios tangenciales de puntos cercanos. Esta conexión, que se construye a partir de la métrica, está encapsulada en algo que se denomina símbolo de Christoffel, dado por : [\[7\]](#), [\[10\]](#)

primer orden:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.1)$$

segundo orden:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (2.2)$$

La notación de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ hace pensar que esto puede ser un tensor, pero no lo es. Es por esto que le decimos símbolo. Se le dice conexión porque esta ayuda a describir la “trayectoria” mínima entre dos puntos (concepto que también se ve en cursos de mecánica clásica para trayectorias rectas con las ecuaciones

de Euler-Lagrange) con la ecuación de la geodésica (lo más parecido a una recta en un espacio curvo). [7], [10]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Una representación de una geodésica se puede ver en un espacio S^2 donde tomaremos una esfera y que sólo podemos movernos en la superficie, pues si apuntamos hacia adelante en línea recta veremos que nos curvaremos y llegaremos al mismo sitio, a esto se le denomina **círculo máximo** (ejemplos de esto, el ecuador en la Tierra). También definiremos el **paralelismo** como dos vectores iniciando en un punto que se consideran paralelos y cuando nos desplazemos estos se correrán cierto ángulo, esto se le conoce como **transporte paralelo**.

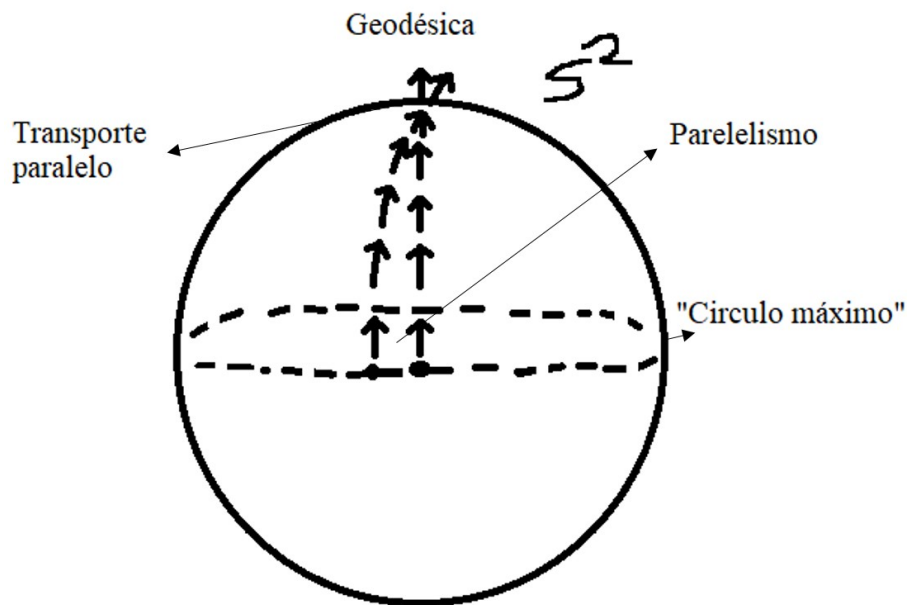


Figura 2.5: Geodésica y transporte paralelo.

2.4.2. Tensor de Riemann

Por último, podemos decir que la información de la curvatura se encuentra en el tensor de Riemann. Todo lo que uno quiere saber acerca de la curvatura en una variedad está dado por este tensor. [7], [10]

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \quad (2.3)$$

Hay que tener en cuenta que para casos donde el espacio-tiempo sea plano estos se desvanecerán (serán iguales a cero).

2.5. Ecuaciones de Einstein

Hemos hablado de la curvatura, pero no existirá tal cosa si no tenemos una fuente de la misma, y al final de cuentas, es la que nos ayudará a entender la física del espacio-tiempo. Podemos ver una relación muy peculiar entre la parte geométrica y la parte física que está caracterizada en las ecuaciones de Einstein. Podemos decir que la medida del espacio-tiempo curvo será igual a la medida de la densidad de energía-materia. Así como en las ecuaciones de Maxwell gobiernan cómo los campos magnéticos y eléctricos responden a las cargas y corrientes, las ecuaciones de campo de Einstein gobiernan cómo la métrica responde a la energía y al momento.

2.5.1. Física en espacio-tiempos curvados

Podemos ver una gran similitud En la ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano. [7]

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

Observemos que al lado izquierdo tenemos un laplaciano actuando en el potencial gravitacional, y en el lado derecho tenemos una medida de distribución de masa. Sabemos que la generalización de la masa viene dada por algo llamado el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. El potencial gravitacional debería ser reemplazado por la métrica debido a la idea del principio de equivalencia que ya hablamos anteriormente, reproduciendo así la gravedad. Entonces decimos: [7]

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Por facilidad de notación, necesitamos que esto esté completamente en forma tensorial y siguiendo el formalismo de que las derivadas parciales sean cambiadas por derivadas covariantes $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ (para que se sigan cumpliendo en espacios curvos). Para esto, hacemos uso del tensor de Riemann ya descrito anteriormente, ya que este contiene primeras derivadas de la métrica y junto con la conexión, que también tiene primeras derivadas, obtendremos segundas derivadas de la métrica en el tensor $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Y como no tiene el número correcto de índices, podemos hacer uso de la matemática tensorial para contraer índices.

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$$

Este se le denomina el tensor de Ricci, Entonces nuestra ecuación (2.4) se vería transformada como:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Existe un problema ya que por conservación de energía si necesitamos preservar,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

tendremos que:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$$

Pero esto no es cierto para una geometría arbitraria, se ve en la identidad de Bianchi que: (mirar [7](#) para mejor desarrollo)

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \quad (2.6)$$

$$\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0 \quad (2.7)$$

Podemos contraer con la métrica el tensor de Ricci para hallar el escalar de Ricci o escalar de curvatura, y esto se puede hacer con cualquier tensor.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Entonces, nuestra ecuación de campo (2.5) propuesta se puede ver contraída por la expresión anterior como:

$$R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T \quad (2.8)$$

Demostrando así que sí en la ecuación (2.8)

$$\nabla_{\mu} T = 0$$

Se cumpliría la conservación de la energía y el momento. Luego hablaremos más del tensor T . Entonces, podemos ver que si trabajamos con la identidad de Bianchi (2.7), podemos llegar al tensor que conserva todo, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Ver desarrollo en [\[7\]](#).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

No demostraremos el cómo se halló la constante $\kappa^2 = 8\pi$. Entonces, podemos concluir que nuestra primera ecuación (2.4) se transformó en la ecuación (2.9), de manera que con la ecuación de Einstein podemos describir la física de nuestro espacio-tiempo uniendo geometría y física en una sola ecuación.

2.5.2. Condiciones de energía

Discutiremos ahora lo que el tensor de energía-momento nos informará, ya que podemos hacernos la pregunta: ¿para qué nos sirve saber el tensor de energía-momento de una métrica si esta puede ser cualquier cosa? Esto es una de las preguntas que algunos de los físicos más puristas (de la manera experimental de la palabra, claramente) se ven obligados a pensar, y tienen razón. En ausencia de ciertas restricciones, tendremos resultados que físicamente no tienen sentido o pueden ser llamados no reales. Es por esto que

necesitamos ciertas condiciones que nos ayuden a delimitar la arbitrariedad del tensor $T_{\mu\nu}$.

Por propósitos de intuición física, y que no explicaremos aquí, podemos considerar un fluido perfecto como fuente de energía y momento, descrito en la siguiente ecuación [7]:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p) \quad (2.10)$$

o

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\nu\mu}$$

Donde U_μ es la cuadri-velocidad del fluido. Entonces, existirán ciertas condiciones de energía que describiremos, pero no entraremos en el tema de explicar lo que un vector nulo es o lo que un vector “killing” es, o un vector tipo tiempo es. Que sí están relacionados con cosas que dijimos anteriormente pero no se explicaron a profundidad en este texto.

- La **Condición de energía debil** o sus siglas en ingles WEC, implica que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para cualquier vector tipo tiempo t^μ o equivalente a que $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$. lo que nos dice esto es que no existiran densidades de energías negativas
- La **Condición de energía fuerte** o sus siglas en ingles SEC, nos dice que $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^\lambda{}_\lambda g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$ para todos los vectores tipo tiempo t^μ , o equivalente a que $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 3p \geq 0$. Lo que nos dice esto es que la gravedad es atractiva
- **Condición de energía dominante** o sus siglas en DEC, nos muestra que $T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0$ donde $T^{\mu\nu}t_\mu$ no puede ser un vector tipo espacio, o equivalente a que $\rho \geq |p|$. Esto implica que no se permitira propagaciones de energía más rapida que la luz.
- La **Condición de energía nula** o sus siglas en ingles NEC, nos implica que $T_{\mu\nu}\ell^\mu \ell^\nu$ para todo vector nulo ℓ^μ , o equivalente a que $\rho + p \geq 0$. Esto nos dice que al igual que la WEC la densidad de energía no va ser negativa pero en casos limites.

Se puede ver que hay una relación entre cada una de ellas, en general se puede ver cuál contiene a la otra y cual no en la siguiente imagen.

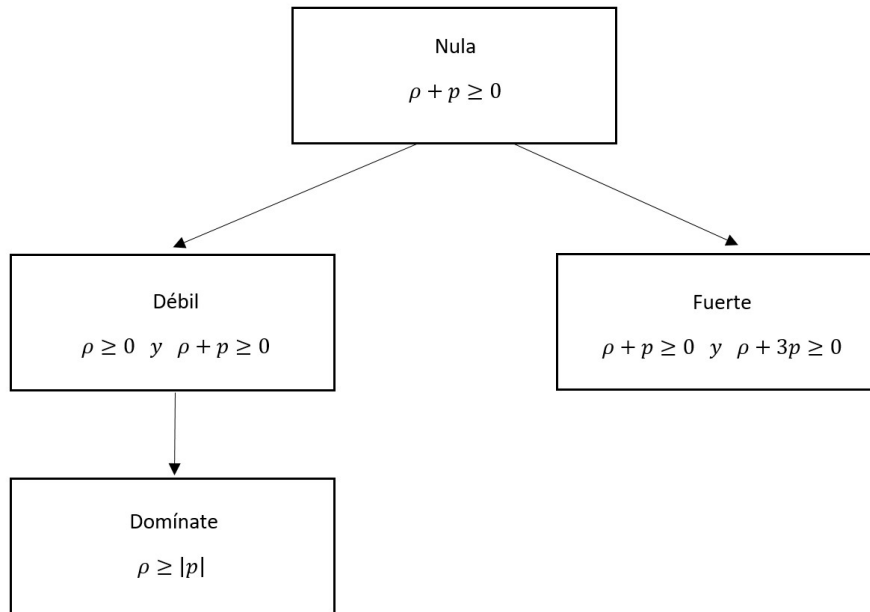


Figura 2.6: Condiciones de energía y su relación.

2.6. Agujeros negros

Uno de los grandes éxitos de la teoría en la actualidad es la predicción de los agujeros negros. En este capítulo hablaremos de algunos de ellos y algunas características que se necesitan para entender su comportamiento. K. Schwarzschild, físico alemán, fue uno de los principales en proponer una solución de las ecuaciones de Einstein para un campo gravitacional estático dotado de masa y simétricamente esférico en vacío, y que después de mucho tiempo se le otorgaría el nombre de agujero negro. Existen diferentes tipos de agujeros negros, en este trabajo se analizará algunos de ellos como, por ejemplo, esférico estático con carga (Reissner-Nordström), rotante (Kerr) y rotante con carga (Kerr-Newman).

2.6.1. La métrica de Schwarzschild

Esta primera solución de las ecuaciones de campo de Einstein, están definidas por la siguiente métrica [\[7\]](#):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.11)$$

Donde el ángulo sólido $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, donde M representa la masa del objeto estelar y r el radio.

Con esta métrica, podemos hacer uso de todas las ecuaciones aprendidas en las secciones anteriores y podemos verificar que esta es una solución en vacío, ya que el tensor de Ricci se hará nulo. En general, podemos seguir un patrón para poder describir toda la métrica, siguiendo la siguiente fórmula:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma \rightarrow R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \rightarrow R \quad (2.12)$$

Lo que se quiere representar es que si tenemos una métrica, podemos calcular la conexión con los símbolos de Christoffel. Teniendo estos símbolos, podemos hacer uso del tensor de Riemann, el cual nos dirá si nuestra métrica es curva o no. Con el tensor de Riemann, podemos calcular el tensor de Ricci, el cual tiene relación directa con el tensor de energía-momento y sus fuentes, y finalmente, podemos calcular el escalar de curvatura de Ricci que conoceremos como un invariante de curvatura, pero ya hablaremos de esto.

2.6.2. Teorema de Birkhoff

El teorema de Birkhoff es una muestra de que la métrica de Schwarzschild es una solución única en vacío con simetría esférica e independiente del tiempo, por lo que le daría su característica estática. Definiremos ansatz como la forma general de describir métricas con una geometría en específico, para el caso esférico y estático se ve en la siguiente ecuación [7]:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.13)$$

Con esto, podemos computar y desarrollar la matemática de la geometría diferencial para poder describir la física de esta métrica.

2.6.3. Singularidades e invariantes de curvatura

Podemos ver a simple vista que surge un problema en la métrica de Schwarzschild cuando r toma valores iguales a cero $r = 0$ y cuando se hace igual al radio de Schwarzschild $r = r_s = 2M$. Si nos tomamos la molestia de calcular los invariantes de curvatura para entender qué es lo que pasa en estos puntos de la curvatura, nos daremos cuenta de ciertas cosas.

Principalmente calcularemos tres invariantes de curvatura. En general, las conjugaciones del tensor de Riemann. El más simple de estos es el escalar de curvatura de Ricci R , y podemos construir escalares de mayor orden, pero en este trabajo serán utilizados sólo tres de ellos: el ya mencionado $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, el denominado Invariante de Kretschmann $K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, y $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Podemos construir más, pero estos son los principales, ya que el resto son conjugaciones de estos invariantes. Ahora bien, si calculamos el invariante K , nos podemos dar cuenta de que [7]:

$$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.14)$$

Los invariantes de curvatura nos dirán cuándo hay una singularidad real en la curvatura. Esto nos será de utilidad para saber cuándo una singularidad es física (real) o meramente matemática (falsa por cambio de coordenadas). Podemos ver en la ecuación (10) y en ningún otro invariante, que cuando $r = r_s = 2M$ no habrá ningún problema de divergencias, y podremos concluir que fue una mala elección de coordenadas. Es más, algo curioso es que la

región $r = 2M$ es el horizonte de sucesos. Pero cuando $r = 0$, seguiremos teniendo el mismo problema, no podremos deshacernos fácilmente de esta singularidad.

La singularidad es un problema que en la relatividad general se ha tratado de abordar de diferentes formas, ya sea apelando a la QFT (Quantum Field Theory) o, como ocurre en este trabajo, considerando topologías exóticas como las de Bardeen. Lo único cierto acerca de las singularidades es que demuestran que la teoría de Einstein sigue siendo incompleta y nos cuesta entender qué es lo que realmente sucede en esta región del espacio-tiempo.

2.6.4. Teorema de singularidad de Penrose (1965)

R. Penrose en su artículo [16] demuestra de una manera muy brillante el cómo debería de ser un agujero negro para que este definitivamente tenga una singularidad. El enunciado de este teorema dice así:

- Sea \mathcal{M} un espacio-tiempo para el cuál la condición de convergencia nula se satisface, es decir $R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu \geq 0$ para todos los vectores nulos $\ell^\mu \in \mathcal{M}$, si existe una hipersuperficie de Cauchy no compacta Σ y una superficie atrapada cerrada S , entonces \mathcal{M} es geodésicamente nulo incompleto.

Lo que este teorema trata de decirnos es que todo espacio-tiempo que cumpla con las ecuaciones de Einstein y que: **i)** cumpla con las condiciones de energía débil y, por ende, la nula (si se incumple la nula, se incumplen todas las condiciones de energía). **ii)** Que el espacio-tiempo globalmente hiperbólico no se rompa. Un espacio-tiempo globalmente hiperbólico debe tener una superficie de Cauchy no compacta y la existencia de superficies cerradas atrapadas. Si todo esto se cumple, entonces se dice que tenemos una geodésica nula incompleta, en otras palabras, una singularidad. se puede ver más en [11], [14], [11]

2.7. Agujeros negros del tipo “black-bounce”

Estas soluciones de las ecuaciones de Einstein son las primeras en configurar una métrica donde se pueden obtener agujeros negros sin singularidades. Dependiendo de si queremos o no variar un parámetro, se pueden convertir en agujeros negros regulares (sin singularidades y bien comportados) o agujeros de gusano. La solución de estos agujeros negros fue llevada a cabo por Simpson y Visser. [19]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)^{-1} + (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Podemos observar la siguiente métrica que interpola entre la métrica de Schwarzschild y un agujero de gusano atravesable del tipo Morris-Thorne, y en estados intermedios pasa por un “black-bounce” (un rebote entre una encarnación futura del universo) y un extremo “Null-bounce” (un rebote entre una encarnación futura del universo), además de un agujero de gusano atravesable. También, contará con una masa cuasi-local que es una generalización de la masa, pero no profundizaremos mucho en este tema. [1], [12].

En el presente trabajo se desarrollará lo relacionado con la geometría de esta métrica y encontraremos los invariantes de curvatura para poder ver que esta no cuenta con ninguna singularidad.

2.7.1. Agujeros negros regulares

Una de las primeras propuestas de regularidad en un agujero negro (no singularidad y bien comportamiento) fue la métrica propuesta por Bardeen en 1968 [3], la cuál era una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de campos electromagnéticos (igual que la solución de Reissner-Nordstrom) y que cumple características que anteriormente fueron desarrolladas por otros compañeros [9], [17]. Esta solución de Bardeen abrió un nuevo horizonte para el desarrollo de nuevas soluciones en donde los agujeros negros pudieran evadir de alguna forma los teoremas de singularidad de Penrose, y que fueron de inspiración para los “black-bounce”.

Podemos ver la métrica de Bardeen aquí:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

El parámetro m está asociado, como ya dijimos anteriormente, con una evaluación de la masa ADM [1]. Podemos ver que esta métrica tiene los escalares de curvatura bien definidos, por lo que sería regular o, en otras palabras, no cuenta con singularidades. Desde aquí se empezarían a formar nuevas propuestas al estilo de Bardeen y que servirían de ejemplo para decir que no puede existir una forma de probar la no existencia de teoremas de singularidad generales [16]. Luego fue propuesta una fuente para esta solución de campos de Einstein llamada electrodinámica no lineal (NLED) [2].

2.7.2. Agujero de gusano (Morris-Thorne)

En el artículo publicado por Morris-Thorne en 1988 [15] proponen una solución de las ecuaciones de Einstein donde existirá una posibilidad para poder viajar a través de un agujero negro por algo que denominamos agujero de gusano. Podemos ver que existirán ciertas características de cómo se comporta esta solución junto con su desarrollo matemático, cosa que no será de interés en el trabajo. Su métrica sigue la siguiente forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.15)$$

Aquí una representación visual del objeto en cuestión hecho en wolfram alpha.

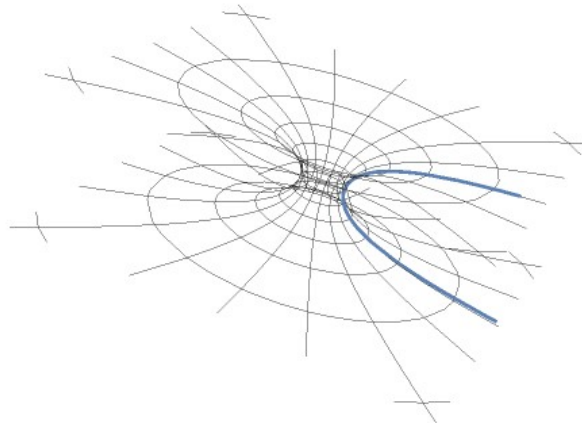


Figura 2.7: Agujero de gusano Morris-Thorne

Capítulo 3

Metodología

3.1. Cálculo de invariantes de curvatura para Agujeros negros esféricos estáticos

Utilizaremos la ecuación (2.13) del teorema de Birkhoff, discutido en la sección 2.6, para poder describir agujeros negros estáticos y esféricos. En un sistema matricial, podemos representarlo de la siguiente manera:

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Necesitaremos calcular la métrica contravariante para poder realizar ciertas operaciones, haciendo uso de la inversa mediante álgebra básica.

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\beta(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

3.1.1. Métrica Schwarzschild

Reemplazamos la métrica de Schwarzschild

$$-e^{2\alpha(r)} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

y

$$e^{2\beta(r)} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

Calculamos las primeras derivadas de la métrica que serán utilizadas en la ecuación de los símbolos de Christoffel (ver ecuación (2.1)). Hay que tener en cuenta que todos los cálculos realizados (hechos en Maple 18) van a tener la siguiente notación:

$$t \rightarrow 1; r \rightarrow 2; \theta \rightarrow 3; \phi \rightarrow 4;$$

las componentes que no son cero serán:

$$\begin{aligned} (1, 1, 2) &= -\frac{2M}{r^2} \\ (2, 2, 2) &= -\frac{2M}{(-r + 2M)^2} \\ (3, 3, 2) &= 2r \\ (4, 4, 2) &= 2r \sin(\theta)^2 \\ (4, 4, 3) &= 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Calculamos las segundas derivadas de la métrica derivando nuevamente las primeras. Las componentes que no son cero serán:

$$\begin{aligned} (1, 1, 2, 2) &= \frac{4M}{r^3} \\ (2, 2, 2, 2) &= -\frac{4M}{(-r + 2M)^3} \\ (3, 3, 2, 2) &= 2 \\ (4, 4, 2, 2) &= 2\sin(\theta)^2 \\ (4, 4, 2, 3) &= 4r\sin(\theta)\cos(\theta) \\ (4, 4, 3, 3) &= 2r^2(2\cos(\theta)^2 - 1) \end{aligned}$$

Con estas derivadas, pasamos a calcular los símbolos de Christoffel de primer orden (ver ecuación (2.1)) y segundo orden (ver ecuación (2.2)) (los de segundo orden los utilizamos solo como comparación con otros libros, ver anexos). Las componentes que no son cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{112} &= \frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{121} &= -\frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{222} &= -\frac{M}{(-r + 2M)^2} \\ \Gamma_{233} &= r \\ \Gamma_{244} &= r\sin(\theta)^2 \\ \Gamma_{332} &= -r \\ \Gamma_{344} &= r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{442} &= -r\sin(\theta)^2 \\ \Gamma_{443} &= -r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{aligned}$$

Procedemos a calcular el tensor de Riemann con la ecuación (2.3), lo haremos en su forma totalmente covariante. Las componentes que no se desvanecen son:

$$\begin{aligned}
 R_{1212} &= -\frac{2M}{r^3} \\
 R_{1313} &= -\frac{(-r + 2M)M}{r^2} \\
 R_{1414} &= -\frac{(-r + 2M)M \sin(\theta)^2}{r^2} \\
 R_{2323} &= \frac{M}{-r + 2M} \\
 R_{2424} &= \frac{M \sin(\theta)^2}{-r + 2M} \\
 R_{3434} &= 2rM \sin(\theta)^2
 \end{aligned}$$

Ahora podemos hacer el cálculo del tensor de Ricci. Contrayendo con la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, las componentes no nulas del tensor de Riemann son:

$$\begin{array}{ll}
 R_{11} = 0 & R_{12} = 0 \\
 R_{13} = 0 & R_{14} = 0 \\
 R_{21} = 0 & R_{22} = 0 \\
 R_{23} = 0 & R_{24} = 0 \\
 R_{31} = 0 & R_{32} = 0 \\
 R_{33} = 0 & R_{34} = 0 \\
 R_{41} = 0 & R_{42} = 0 \\
 R_{43} = 0 & R_{44} = 0
 \end{array}$$

Con esto, procedemos a calcular el escalar de curvatura de Ricci y, por ende, nuestro primer invariante de curvatura, combinándolo con $g^{\mu\nu}$ y el tensor de Ricci. Pero a simple vista, se observa que:

$$R = 0$$

Calculamos nuestro segundo invariante de curvatura, el invariante de Kretschmann, con la ecuación (2.14), formando los productos de las componentes que no son cero del tensor de Riemann.

Pero primero necesitamos las componentes inversas, por lo que subiremos los índices con la métrica contravariante $g^{\mu\nu}$.

$$R^{\theta\lambda\tau\alpha} = R_{\rho\sigma\mu\nu} g^{\rho\theta} g^{\sigma\lambda} g^{\mu\tau} g^{\nu\alpha} \quad (3.1)$$

Como son índices mudos, podemos volver a las variables.

$$R^{\theta\lambda\tau\alpha} \rightarrow R^{\rho\sigma\mu\nu}$$

Entonces, calculando las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^{1212} &= -\frac{2M}{r^3} \\ R^{1313} &= -\frac{M}{r^4(-r+2M)} \\ R^{1414} &= -\frac{M}{r^4 \sin(\theta)^2(-r+2M)} \\ R^{2323} &= \frac{(-r+2M)M}{r^6} \\ R^{2424} &= \frac{(-r+2M)M}{r^6 \sin(\theta)^2} \\ R^{3434} &= \frac{2M}{r^7 \sin(\theta)^2} \end{aligned}$$

Haciendo los productos de los componentes no cero:

$$\begin{aligned} K &= R_{\rho\sigma\mu\nu} R^{\rho\sigma\mu\nu} \\ K &= 4(R_{1212} R^{1212} + R_{1313} R^{1313} + R_{1414} R^{1414} + R_{2323} R^{2323} \\ &\quad + R_{2424} R^{2424} + R_{3434} R^{3434}) \end{aligned}$$

$$K = \frac{48M^2}{r^6} \quad (3.2)$$

Por último, obtenemos nuestro último invariante, contrayendo de una manera análoga a como se hizo en (3.1) pero ahora con el tensor de Ricci. Sin embargo, ya vamos viendo que son nulas. Por ende:

$$K_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$K_2 = 0$$

Podemos ver que si hacemos $r \rightarrow 0$ en alguno de los invariantes de curvatura, nos dará un número infinito. Esto nos indica que existe una región singular en $r = 0$.

3.2. Tensor energía-momento para Schwarzschild

Utilizando la ecuación (2.9) de la sección 2.5, podemos hallar el tensor de energía-momento (sabiendo que $\kappa^2 = 8\pi$). Sin embargo, dado que nuestros tensores con los que se construye el tensor de energía-momento son todos nulos, entonces:

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.3)$$

3.2.1. Métrica de Reissner-Nordström

Reemplazamos la métrica de Reissner-Nordström.

$$-e^{2\alpha(r)} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$

y

$$e^{2\beta(r)} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$

Calculamos las primeras derivadas de la métrica, las componentes que no son cero serán:

$$\begin{aligned} (1, 1, 2) &= -\frac{2(Mr - Q^2)}{r^3} \\ (2, 2, 2) &= -\frac{2r(Mr - Q^2)}{(2Mr - Q^2 - r^2)^2} \\ (3, 3, 2) &= 2r \\ (4, 4, 2) &= 2r \sin(\theta)^2 \\ (4, 4, 3) &= 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Calculamos las segundas derivadas de la métrica derivando nuevamente las primeras, las componentes que no son cero serán:

$$\begin{aligned} (1, 1, 2, 2) &= \frac{2(2Mr - 3Q^2)}{r^4} \\ (2, 2, 2, 2) &= -\frac{2(2Mr^3 + Q^4 - 3Q^2r^2)}{(2Mr - Q^2 - r^2)^3} \\ (3, 3, 2, 2) &= 2 \\ (4, 4, 2, 2) &= 2 \sin(\theta)^2 \\ (4, 4, 2, 3) &= 4r \sin(\theta) \cos(\theta) \\ (4, 4, 3, 3) &= 2r^2 (2 \cos(\theta)^2 - 1) \end{aligned}$$

Con estas derivadas, pasamos a calcular los símbolos de Christoffel de primer orden y segundo orden (los de segundo orden los usamos solo como comparación con otros libros, ver anexos). Las componentes que no son cero son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{112} &= \frac{Mr - Q^2}{r^3} \\ \Gamma_{121} &= -\frac{Mr - Q^2}{r^3} \\ \Gamma_{222} &= -\frac{r(Mr - Q^2)}{(2Mr - Q^2 - r^2)^2} \\ \Gamma_{233} &= r \\ \Gamma_{244} &= r \sin(\theta)^2 \\ \Gamma_{332} &= -r \\ \Gamma_{344} &= r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{442} &= -r \sin(\theta)^2 \\ \Gamma_{443} &= -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\end{aligned}$$

Procedemos a calcular el tensor de Riemann, las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned}R_{1212} &= -\frac{2Mr - 3Q^2}{r^4} \\ R_{1313} &= -\frac{(2Mr - Q^2 - r^2)(Mr - Q^2)}{r^4} \\ R_{1414} &= -\frac{(2Mr - Q^2 - r^2)(Mr - Q^2) \sin(\theta)^2}{r^4} \\ R_{2323} &= \frac{Mr - Q^2}{2Mr - Q^2 - r^2} \\ R_{2424} &= \frac{(Mr - Q^2) \sin(\theta)^2}{2Mr - Q^2 - r^2} \\ R_{3434} &= \sin(\theta)^2 (2Mr - Q^2)\end{aligned}$$

Ahora podemos hacer el cálculo del tensor de Ricci. Contrayendo con la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, las componentes no nulas del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{(2Mr - Q^2 - r^2)Q^2}{r^6} & R_{22} &= -\frac{Q^2}{r^2(2Mr - Q^2 - r^2)} \\ R_{33} &= -\frac{Q^2}{r^2} & R_{44} &= -\frac{\sin(\theta)^2 Q^2}{r^2} \end{aligned}$$

Con esto, procedemos a calcular el escalar de curvatura de Ricci y, por ende, nuestro primer invariante de curvatura, contrayéndolo con las componentes no nulas de $g^{\mu\nu}$ y las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44}$$

$$R = 0$$

Necesitamos las componentes inversas del tensor de Riemann, realizando el mismo procedimiento que en la ecuación (3.1).

Calculamos las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^{1212} &= -\frac{2Mr - 3Q^2}{r^4} \\ R^{1313} &= -\frac{Mr - Q^2}{r^4(2Mr - Q^2 - r^2)} \\ R^{1414} &= -\frac{Mr - Q^2}{r^4 \sin(\theta)^2 (2Mr - Q^2 - r^2)} \\ R^{2323} &= \frac{(2Mr - Q^2 - r^2)(Mr - Q^2)}{r^8} \\ R^{2424} &= \frac{(2Mr - Q^2 - r^2)(Mr - Q^2)}{r^8 \sin(\theta)^2} \\ R^{3434} &= \frac{2Mr - Q^2}{r^8 \sin(\theta)^2} \end{aligned}$$

Haciendo los productos de los componentes no cero para hallar K :

$$K = R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu}$$

$$K = 4(R_{1212}R^{1212} + R_{1313}R^{1313} + R_{1414}R^{1414} + R_{2323}R^{2323} + R_{2424}R^{2424} + R_{3434}R^{3434})$$

$$K = \frac{8(6M^2r^2 - 12MQ^2r + 7Q^4)}{r^8} \quad (3.4)$$

Por último, obtenemos nuestro último invariante, contrayendo de una manera análoga a como se hizo en (3.1), pero ahora con el tensor de Ricci, utilizando las componentes no nulas del tensor de Ricci contravariante.

$$R_{11} = \frac{Q^2}{r^2(2Mr - Q^2 - r^2)} \quad R_{22} = -\frac{(2Mr - Q^2 - r^2)Q^2}{r^6}$$

$$R_{33} = -\frac{Q^2}{r^6} \quad R_{44} = -\frac{Q^2}{r^6 \sin(\theta)^2}$$

Hallamos nuestro tercer invariante.

$$K_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$K_2 = R_{11}R^{11} + R_{22}R^{22} + R_{33}R^{33} + R_{44}R^{44}$$

Entonces.

$$K_2 = \frac{4Q^4}{r^8} \quad (3.5)$$

3.3. Tensor energía-momento para Reissner-Nordström

Utilizando la ecuación (2.9) de la sección 2.5, podemos hallar el tensor de energía-momento.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(2Mr-Q^2-r^2)Q^2}{8\pi r^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{8\pi r^2(2Mr-Q^2-r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q^2}{8\pi r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin(\theta)^2 Q^2}{8\pi r^2} \end{pmatrix}$$

Podemos expresarlo en su término mixto.

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{Q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q^2}{8\pi r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Q^2}{8\pi r^4} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.4. Cálculo de invariantes de curvatura para agujeros negros de tipo “black bounce” esféricos estáticos

Utilizaremos una versión modificada de la ecuación (2.13) del teorema de Birkhoff, discutido en la sección 2.6, para poder describir agujeros negros estáticos y esféricos del tipo “black bounce”. Nuestro teorema modificado quedaría:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt + e^{2\beta(r)} dr + \Sigma(r)^2 d\Omega \quad (3.7)$$

En un sistema matricial, podemos representarlo de la siguiente manera:

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma(r)^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Necesitaremos calcular la métrica contravariante para poder realizar ciertas operaciones, haciendo uso de la inversa mediante álgebra básica.

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\beta(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma(r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma(r)^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

3.4.1. Métrica de Simpson-Visser

Reemplazamos la métrica de Simpson-Visser

$$-e^{2\alpha(r)} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

y

$$e^{2\beta(r)} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

Junto con el parámetro de regularización.

$$\Sigma(r) = \sqrt{r^2 + a^2}$$

Calculamos las primeras derivadas de la métrica. Las componentes que no son cero serán:

$$(1, 1, 2) = -\frac{2(mr)}{(a^2 + r^2)^{2/3}}$$

$$(2, 2, 2) = -\frac{2r(mr)}{\sqrt{a^2 + r^2}(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)^2}$$

$$(3, 3, 2) = 2r$$

$$(4, 4, 2) = 2r \sin(\theta)^2$$

$$(4, 4, 3) = 2(a^2 + r^2) \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Calculamos las segundas derivadas de la métrica, derivando nuevamente las primeras. Las componentes que no son cero serán:

$$\begin{aligned}
(1, 1, 2, 2) &= -\frac{2m(a^2 - 2r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\
(2, 2, 2, 2) &= -\frac{2((a^2 + r^2)^{3/2}a^2 - r^2(a^2 + r^2)^{3/2} - \sqrt{a^2 + r^2}a^2r^2 - \sqrt{a^2 + r^2}r^4 - 2a^4m - 2a^2mr^2)}{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)^3(a^2 + r^2)^{5/2}} \\
(3, 3, 2, 2) &= 2 \\
(4, 4, 2, 2) &= 2\sin(\theta)^2 \\
(4, 4, 2, 3) &= 4r\sin(\theta)\cos(\theta) \\
(4, 4, 3, 3) &= 2(a^2 + r^2)(2\cos(\theta)^2 - 1)
\end{aligned}$$

Con estas derivadas, pasamos a calcular los símbolos de Christoffel de primer orden (2.1) y segundo orden (2.2) (los de segundo orden los usamos solo como comparación de otros libros, ver anexos). Las componentes que no son cero son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{112} &= \frac{mr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \\
\Gamma_{121} &= -\frac{mr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \\
\Gamma_{222} &= -\frac{mr}{\sqrt{a^2 + r^2}(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)^2} \\
\Gamma_{233} &= r \\
\Gamma_{244} &= r\sin(\theta)^2 \\
\Gamma_{332} &= -r \\
\Gamma_{344} &= (r^2 + a^2)\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\Gamma_{442} &= -r\sin(\theta)^2 \\
\Gamma_{443} &= -(r^2 + a^2)\sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Procedemos a calcular el tensor de Riemann. Las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{m(a^2 - 2r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\
R_{1313} &= \frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)mr^2}{(a^2 + r^2)^2} \\
R_{1414} &= \frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)mr^2 \sin(\theta)^2}{(a^2 + r^2)^2} \\
R_{2323} &= -\frac{\sqrt{a^2 + r^2}a^2 - 2a^2m + mr^2}{(a^2 + r^2)(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \\
R_{2424} &= -\frac{\sin(\theta)^2(\sqrt{a^2 + r^2}a^2 - 2a^2m + mr^2)}{(a^2 + r^2)(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \\
R_{3434} &= \frac{\sin(\theta)^2(\sqrt{a^2 + r^2}a^2 + 2mr^2)}{\sqrt{a^2 + r^2}}
\end{aligned}$$

Ahora podemos hacer el cálculo del tensor de Ricci. Contrayendo con la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, las componentes no nulas del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)ma^2}{(a^2 + r^2)^3} & R_{22} &= \frac{a^2(2\sqrt{a^2 + r^2} - 3m)}{(a^2 + r^2)^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \\
R_{33} &= -\frac{2a^2m}{(a^2 + r^2)^{3/2}} & R_{44} &= -\frac{2\sin(\theta)^2a^2m}{(a^2 + r^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Con esto, procedemos a calcular el escalar de curvatura de Ricci y, por ende, nuestro primer invariante de curvatura, contrayéndolo con las componentes no nulas de $g^{\mu\nu}$ y las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44}$$

$$R = \frac{2a^2(-3m + \sqrt{a^2 + r^2})}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \quad (3.8)$$

Necesitamos las componentes inversas del tensor de Riemann, siguiendo el mismo procedimiento de la ecuación (3.1).

Calculamos las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
 R^{1212} &= \frac{m(a^2 - 2r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\
 R^{1313} &= \frac{mr^2}{(a^2 + r^2)^3(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \\
 R^{1414} &= \frac{mr^2}{\sin(\theta)^2(a^2 + r^2)^3(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \\
 R^{2323} &= -\frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)(\sqrt{a^2 + r^2}a^2 - 2a^2m + mr^2)}{(a^2 + r^2)^4} \\
 R^{2424} &= -\frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)(\sqrt{a^2 + r^2}a^2 - 2a^2m + mr^2)}{\sin(\theta)^2(a^2 + r^2)^4} \\
 R^{3434} &= \frac{\sqrt{a^2 + r^2}a^2 + 2mr^2}{\sin(\theta)^2(a^2 + r^2)^{9/2}}
 \end{aligned}$$

Haciendo los productos de los componentes no cero para hallar K :

$$\begin{aligned}
 K &= R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu} \\
 K &= 4(R_{1212}R^{1212} + R_{1313}R^{1313} + R_{1414}R^{1414} + R_{2323}R^{2323} \\
 &\quad + R_{2424}R^{2424} + R_{3434}R^{3434})
 \end{aligned}$$

$$K = \frac{4(8\sqrt{a^2 + r^2}a^4m - 8\sqrt{a^2 + r^2}a^2mr^2 - 3a^6 - 9a^2m^2 - 3a^4r^2 + 12a^2m^2r^2 - 12m^2r^4)}{(a^2 + r^2)^5}$$

factorizándolo de tal manera que quede como en [19].

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{4}{(r^2 + a^2)^5} \{ \sqrt{r^2 + a^2} [8a^2m(r^2 - a^2)] \\
 &\quad + 3a^4(r^2 + a^2) + 3m^2(3a^4 - 4a^2r^2 + 4r^4) \}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por último, obtenemos nuestro último invariante, contrayendo de manera análoga a como se hizo en (3.1), pero ahora con el tensor de Ricci utilizando las componentes no nulas del tensor de Ricci contravariante.

$$R_{11} = -\frac{ma^2}{(a^2 + r^2)^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)} \quad R_{22} = \frac{(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)a^2(2\sqrt{a^2 + r^2} - 3m)}{(a^2 + r^2)^3}$$

$$R_{33} = -\frac{2ma^2}{(a^2 + r^2)^{7/2}} \quad R_{44} = -\frac{2ma^2}{\sin(\theta)^2(a^2 + r^2)^{7/2}}$$

$$K_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$K_2 = R_{11}R^{11} + R_{22}R^{22} + R_{33}R^{33} + R_{44}R^{44}$$

Entonces.

$$K_2 = -\frac{2a^4(6\sqrt{a^2 + r^2}m - 2a^2 - 9m^2 - 2r^2)}{(a^2 + r^2)^5}$$

Factorizándolo de tal manera que quede como en: [19].

$$K_2 = \frac{a^4[4(\sqrt{a^2 + r^2} - \frac{3}{2}m)^2 + (3m)^2]}{(a^2 + r^2)^5} \quad (3.10)$$

3.5. Tensor energía-momento para Simpson-Visser

Utilizando la ecuación (2.9) de la sección 2.5, podemos hallar el tensor de energía-momento. Ver anexos para mayores procedimientos.

Podemos expresarlo en su término mixto.

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{a^2(\sqrt{a^2+r^2}-4m)}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{8\pi(a^2+r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2(-m+\sqrt{a^2+r^2})}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2(-m+\sqrt{a^2+r^2})}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

3.5.1. Métrica de “black-bounce” Reissner-Nordstrom-Simpson-Visser

Nuestros invariantes de curvatura quedarían. (Si se quieren ver los cálculos como anteriormente, ver anexos).

Para el invariante de curvatura de Ricci:

$$R = \frac{2(Q^2\sqrt{a^2+r^2} - 3m + \sqrt{a^2+r^2}a^2 - 3mr^2 + \sqrt{a^2+r^2}r^2)a^2}{(a^2+r^2)^{7/2}}$$

factorizándolo de tal manera que quede como en [8].

$$R = -\frac{2a^2}{(r^2+a^2)^3}[Q^2+r^2+a^2-3m\sqrt{r^2+a^2}] \quad (3.12)$$

Para el invariante de curvatura de Krestchmann:

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{(a^2+r^2)^2}(4(10Q^2a^4m\sqrt{a^2+r^2} - 22\sqrt{a^2+r^2}Q^2a^2mr^2 \\ & + 24\sqrt{a^2+r^2}Q^2mr^4 + 8a^6m\sqrt{a^2+r^2} \\ & - 8\sqrt{a^2+r^2}a^2mr^4 - 3Q^4a^4 + 10Q^4a^2r^2 \\ & - 14Q^4r^4 - 4Q^2a^6 + 2Q^2a^4r^2 + 6Q^2a^2r^4 - 3a^8 \\ & - 9a^6m^2 - 6a^6r^2 + 3a^4m^2r^2 - 3a^4r^4 - 12m^2r^6)) \end{aligned}$$

factorizándolo de tal manera que quede como en [8].

$$\begin{aligned} K = & \frac{4}{(r^2+a^2)^6}\{(3a^2-10a^2r^2+14r^4)Q^4 \\ & + \sqrt{r^2+a^2}[2a^2(2a^2-3r^2)\sqrt{r^2+a^2} \\ & - 2m(5a^4-11a^2r^2+12r^4)]Q^2 + 3a^8 + \\ & (9m^2+6r^2)a^6 + 3r^2(r^2-m^2)a^4 \\ & - 8ma^2(a^2-r^4)\sqrt{r^2+a^2} + 12m^2r^6\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para el invariante de curvatura, Krestchmann 2:

$$\begin{aligned}
K_2 = & -\frac{2}{(a^2 + r^2)^6} (8Q^2 a^4 m \sqrt{a^2 + r^2} - 2\sqrt{a^2 + r^2} Q^2 a^2 m r^2 \\
& + 6a^6 m \sqrt{a^2 + r^2} + 6\sqrt{a^2 + r^2} a^4 m r^2 - 2Q^4 a^4 + 2Q^4 a^2 r^2 - 2Q^4 r^4 \\
& - 2Q^2 a^6 - 4Q^2 a^4 r^2 - 2Q^2 a^2 r^4 - 2a^8 - 9a^6 m^2 \\
& - 4a^6 r^2 - 9a^4 m^2 r^2 - 2a^4 r^4)
\end{aligned}$$

factorizándolo de tal manera que quede como en [8].

$$\begin{aligned}
K_2 = & \frac{4(r^4 - a^2 r^2 + a^4)}{(r^2 + a^2)^6} Q^4 \\
& + \frac{4a^2 [m(r^2 - 4a^2) + (r^2 + a^2)^{3/2}]}{(r^2 + a^2)^{11/2}} Q^2 \\
& + \frac{2a^4 [2r^4 - 6m(r^2 + a^2)^{3/2} + (9m^2 + 4a^2)(r^2 + a^2) - 2a^4]}{(r^2 + a^2)^6}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.6. Tensor energía-momento para “black-bounce” Reissner-Nordström-Simpson-Visser

Utilizando la ecuación (2.9) de la sección 2.5, podemos hallar el tensor de energía-momento. Ver anexos para mayores procedimientos. Vamos a separar nuestro tensor de energía-momento para un mejor uso de ecuaciones e interpretación, tal que:

$$\frac{1}{8\pi} G^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu = (T_{bb})^\mu{}_\nu + (T_Q)^\mu{}_\nu$$

Entonces:

$$(T_{bb})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{a^2(\sqrt{a^2+r^2}-4m)}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{8\pi(a^2+r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a^2(-3m+\sqrt{a^2+r^2})}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2a^2(-3m+\sqrt{a^2+r^2})}{8\pi(a^2+r^2)^{5/2}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

y

$$(T_Q)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{Q^2(r^2-2a^2)}{8\pi(r^2+a^2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q^2 r^2}{8\pi(r^2+a^2)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2 r^2}{8\pi(r^2+a^2)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 r^2}{8\pi(r^2+a^2)^3} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Capítulo 4

Resultados

4.1. Resultados geométricos

Sabemos, según la sección 2.6, que los invariantes de curvatura nos darán una buena señal de si nuestra geometría contará con o sin singularidades. Podemos ver en las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) que los invariantes para estas métricas no divergirán (similar a su caso análogo de los invariantes de curvatura de Schwarzschild). Notemos que diciendo que $a = 0$ recuperaremos la métrica de Schwarzschild, por lo que asumiremos $a \neq 0$. Si decimos que en el límite $r \rightarrow 0$,

$$R = \frac{2(-3m + a)}{a^3}$$

$$K = \frac{4}{a^{10}} \{ a [8a^2 m (-a^2)] + 3a^6 + 3m^2(3a^4) \} \quad (4.1)$$

$$K_2 = \frac{a^4 [4(a - \frac{3}{2}m)^2 + (3m)^2]}{a^{10}}$$

Vemos que todos los invariantes de curvatura son finitos y se comportan adecuadamente, lo que nos indica que no tendrán singularidades. Ahora bien, se puede variar el parámetro a de diferentes maneras para observar cómo se comporta. Notamos que para $a > 0$ tendrá un comportamiento globalmente

regular, como ya hemos visto [13]. Para $a \in (0, 2m]$, habrá dos horizontes. Esto ocurre cuando $\sqrt{r_{\pm} + a^2} = 2m$, entonces nuestros dos horizontes serán $r_{\pm} = \sqrt{(2m)^2 - a^2}$. Este es un análisis similar al que se hace en las coordenadas radiales nulas en los libros [7], [10]. Es un agujero negro regular en el sentido de Bardeen, con el centro siendo un rebote localizado en $r = 0$. para $a = 2m$, tendremos un agujero de gusano con entrada localizada en $r = 0$, siendo una entrada extrema nula. Por lo tanto, esta entrada solo puede ser cruzada en una dirección. Para $a > 2m$, tendremos un agujero de gusano con doble entrada en $r = 0$. Podemos visualizar esto mejor en los diagramas de Penrose en las coordenadas de Kruskal. [7].

Lo mismo sucederá para los invariantes de curvatura del “black-bounce”, análogo al de la métrica de Reissner-Nordström. Las ecuaciones (3.12), (3.13), (3.14) serán globalmente regulares cuando el límite de $r \rightarrow 0$

$$R = -\frac{2(Q^2 + a^2 - 3ma)}{a^4}$$

$$K = \frac{12}{a^8}Q^4 + \frac{8(2a - 5m)}{a^7}Q^2 + \frac{4(3a^2 - 8ma + 9m^2)}{a^6} \quad (4.2)$$

$$K_2 = \frac{4}{a^8}Q^4 + \frac{4(a - 4m)}{a^7}Q^2 + \frac{4a^2 - 12ma + 18m^2}{a^6}$$

Entonces podemos hacer una teorema para analizar la finitud de todas nuestras componentes que no son cero del tensor de Riemann (se puede ver más estrictamente comprobado en [18])

Teorema 1: Para cualquier espaciotiempo estático, en la región estrictamente estática, el escalar de Kretschmann es semidefinido positivo, siendo una suma de cuadrados que involucra todas las componentes no nulas $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Entonces, si este escalar es finito, todas las componentes ortonormales del tensor de curvatura de Riemann deben ser también finitas. En consecuencia, para los espaciotiempos candidatos estáticos, la confirmación de la finitud global del escalar de Kretschmann es suficiente para llegar a la conclusión de la regularidad de la curvatura en el sentido de Bardeen.

4.2. Resultados físicos

Del tensor de energía-momento para la métrica de SV (3.11) obtuvimos los valores de $(-\rho, p, p, p)$ (2.10). Primero, debemos notar que para fuera del horizonte, $\sqrt{r^2 + a^2} > 2m$, tendremos $-\rho = T^t_t$, $p = T^r_r$, $p = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$. Entonces.

$$\rho = \frac{a^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 4m)}{8\pi(a^2 + r^2)^{5/2}}$$

$$p = \frac{a^2}{8\pi(a^2 + r^2)^2}$$

Sumando ρ y p , obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho + p &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{a^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 4m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} \right\} \\ &= \frac{-a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 2m)}{4\pi(r^2 + a^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Segundo, debemos notar que para dentro del horizonte, $\sqrt{r^2 + a^2} < 2m$, tendremos (se cambiarán las componentes t y r , componentes tipo tiempo y tipo espacio) $-\rho = T^r_r$, $p = T^t_t$, $p = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$. Entonces, de las ecuaciones (3.11).

$$-\rho = \frac{a^2}{8\pi(a^2 + r^2)^2}$$

$$p = -\frac{a^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 4m)}{8\pi(a^2 + r^2)^{5/2}}$$

$$\begin{aligned} \rho + p &= \frac{1}{8\pi} \left\{ -\frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} - \frac{a^2(\sqrt{a^2 + r^2} - 4m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \right\} \\ &= \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 2m)}{4\pi(r^2 + a^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Entonces, podemos generalizar para cualquier horizonte.

$$\rho + p = -\frac{a^2 |\sqrt{r^2 + a^2} - 2m|}{4\pi(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (4.5)$$

Y pasará similarmente para (3.15)(3.16) (bbRN).

$$\rho + p = -\frac{a^2 |r^2 + a^2 - 2m\sqrt{r^2 + a^2} + Q^2|}{4\pi(r^2 + a^2)^3} \quad (4.6)$$

Podemos interpretar que las condiciones de energía clásicas se violan por efectos semi-clásicos cuanticos entonces el fluido hipotético tiene que ser anisotropo

Y, se presenta un segundo teorema donde podemos ver la violacion/cumplimiento de las condiciones de energía estandares de la relatividad general. (se puede ver más estrictamente comprobado en [\[18\]](#))

Teorema 2: Para cualquier esfera de fluido anisótropo estático con elemento lineal como en la ecuacion (3.7), todas las condiciones estándar de energía puntual se violan siempre que $-e^{2\alpha(r)} \neq 0$ y $e^{2\beta(r)} \neq 0$, $\Sigma(r) > 0$, y $\Sigma''(r) < 0$.

4.3. Mostrando una fuente generadora

Todas las soluciones de agujeros negros regulares están asociadas a soluciones donde:

$$[T_{NLED}]^\mu{}_\nu \propto [T_{Maxwell}]^\mu{}_\nu \quad (4.7)$$

Que son básicamente una corrección a altos ordenes en el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ y esto se puede extender a una teoría no lineal. Confirmando que estos agujeros negros son soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.

Capítulo 5

Conclusiones

Se logró analizar la regularidad de los agujeros negros del tipo “black-bounce” estáticos y esféricos haciendo uso de los invariantes de curvatura, verificando que no divergen en ningún lugar, como se ve en las ecuaciones (4.1) y (4.2). Por lo tanto, podemos decir que son globalmente regulares.

También podemos decir que se calcularon las condiciones de energía que presentan dichas métricas, y podemos concluir que en la ecuación (4.5) se ve que la condición de energía nula es violada (por lo tanto, todas las demás, ver subsección (2.5.2)). Además, observamos que esta métrica puede variar entre distintas métricas dependiendo del valor que se tome del parámetro a . Como podemos observar y como explicamos en la subsección (2.6), la condición de convergencia nula no se cumple, ya que $\rho + p$ van a ser negativos.

Se puede concluir que se evade, de cierta forma, el problema que genera el teorema de las singularidades de Penrose, ya que las soluciones que este propone nos impiden hacer cálculos en las regiones singulares y ver distintos análisis del espacio-tiempo en estas regiones. Además, podemos decir que evitamos que nuestro espacio-tiempo sea geodésicamente incompleto [6]:

- Las condiciones de energía son violadas, principalmente la condición de energía débil (WEC).
- Se rompe la hiperbolicidad global.

Además, decimos que las fuentes de dichas soluciones provienen de campos electromagnéticos no lineales por lo que son soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. [5], [4], [20]

Para terminar, tenemos que decir que aún rodean grandes misterios alrededor de los agujeros negros y que las soluciones de tipo “black-bounce” son una de las explicaciones que hacen uso de teorías clásicas de la relatividad general para dar explicación a distintas situaciones del espacio-tiempo.

Bibliografía

- [1] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner. “Dynamical structure and definition of energy in general relativity”. En: *Physical Review* 116.5 (dic. de 1959), págs. 1322-1330. DOI: [10.1103/physrev.116.1322](https://doi.org/10.1103/physrev.116.1322).
- [2] Eloy Ayón-Beato y Alberto García. “The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole”. En: *Physics Letters B* 493.1–2 (nov. de 2000), págs. 149-152. DOI: [10.1016/s0370-2693\(00\)01125-4](https://doi.org/10.1016/s0370-2693(00)01125-4).
- [3] Bardeen. presented at GR5, Tiflis, U.S.S.R., and published in the conference proceedings in the U.S.S.R. 1968.
- [4] Nora Bretón. “Electrodinámica no lineal en gravitación”. Español. En: *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva* (2001). ISSN: 1405-0269. URL: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10402212>.
- [5] Pedro Cañate. “Black bounces as magnetically charged phantom regular black holes in Einstein-nonlinear electrodynamics gravity coupled to a self-interacting scalar field”. En: *Physical Review D* 106.2 (jul. de 2022). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.106.024031](https://doi.org/10.1103/physrevd.106.024031).
- [6] Raúl Carballo-Rubio et al. “Geodesically complete black holes”. En: *Physical Review D* 101.8 (abr. de 2020). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.101.084047](https://doi.org/10.1103/physrevd.101.084047).
- [7] Sean Carroll. *spacetime and geometry*. Addison-Wesley Professional, 2004.
- [8] Edgardo Franzin et al. “Charged black-bounce spacetimes”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.07 (jul. de 2021), pág. 036. ISSN: 1475-7516. DOI: [10.1088/1475-7516/2021/07/036](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/07/036).

- [9] Erast B. Gliner. “Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter”. En: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (1966). URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:73594926>.
- [10] J. B. Hartle. *Gravity: An introduction to einstein’s general relativity*. Cambridge University Press, 2003.
- [11] Klaas Landsman. “Penrose’s 1965 singularity theorem: From geodesic incompleteness to cosmic censorship”. En: *General Relativity and Gravitation* 54.10 (sep. de 2022). DOI: [10.1007/s10714-022-02973-w](https://doi.org/10.1007/s10714-022-02973-w).
- [12] F. C. Lima, A. R. Moreira y C. A. Almeida. “Properties of black hole vortex in Einstein’s gravity”. En: *The European Physical Journal Plus* 138.5 (mayo de 2023). DOI: [10.1140/epjp/s13360-023-04036-8](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04036-8).
- [13] Francisco S.N. Lobo et al. “Novel black-bounce spacetimes: Wormholes, regularity, energy conditions, and causal structure”. En: *Physical Review D* 103.8 (abr. de 2021). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.103.084052](https://doi.org/10.1103/physrevd.103.084052).
- [14] Gustavo Melgarejo. *Agujeros negros regulares con topologías exóticas*. Disponible en <https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/0f05bc8c-7cf0-43c8-93dd-7fcc886113c1/content>. Agosto de 2020.
- [15] Michael S. Morris y Kip S. Thorne. “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity”. En: *American Journal of Physics* 56.5 (mayo de 1988), págs. 395-412. DOI: [10.1119/1.15620](https://doi.org/10.1119/1.15620).
- [16] Roger Penrose. “Gravitational collapse and space-time singularities”. En: *Physical Review Letters* 14.3 (1965), págs. 57-59. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [17] A. D. Sakharov. “THE INITIAL STAGE OF AN EXPANDING UNIVERSE AND THE APPEARANCE OF A NONUNIFORM DISTRIBUTION OF MATTER”. En: 1965. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11719700>.
- [18] Alex Simpson. “From black-bounce to traversable wormhole, and beyond”. En: *The Sixteenth Marcel Grossmann Meeting*, págs. 787-807. DOI: [10.1142/9789811269776_0062](https://doi.org/10.1142/9789811269776_0062). eprint: https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789811269776_0062.

- [19] Alex Simpson y Matt Visser. “Black-bounce to traversable wormhole”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.02 (feb. de 2019), págs. 042-042. ISSN: 1475-7516. DOI: [10 . 1088 / 1475 - 7516 / 2019/02/042](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/042).
- [20] Dmitri P. Sorokin. “Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications”. En: *Fortschritte der Physik* 70.7–8 (jul. de 2022). ISSN: 1521-3978. DOI: [10.1002/prop.202200092](https://doi.org/10.1002/prop.202200092).

Anexos

[Repositorio de calculos extra en Github](#)