Neiva, marzo 02 de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El suscrito:

LUIS ERNESTO FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, con C.C. No. 1.075.235.538 de Neiva, autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado "El Aprendizaje de la Proporcionalidad a través de la Matematización de las Esculturas Andaquíes" presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de MAGISTER ENEDUCACIÓN; autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR: LUIS ERNESTO FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: "EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD A TRAVÉS DE LA MATEMATIZACIÓN DE LAS ESCULTURAS ANDAQUÍES"

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ	**LUIS ERNESTO**

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
PENAGOS	**MAURICIO**

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MAGISTER EN EDUCACIÓN

FACULTAD: **EDUCACIÓN**

PROGRAMA O POSGRADO:

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2023 **NÚMERO DE PÁGINAS: 91**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas_X_ Fotografías_X__ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: **Ninguno**

MATERIAL ANEXO: Ninguno

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: **Ninguno**

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Matematización	Mathematization
2. Contextualización	Contextualization
3. Matemática Estatuaria	Mathematic Statuary
4. Proporcionalidad	Proportionality
5. Visualización	Visualization

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Típicamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se han basado en el tradicionalismo, la memoria y lo algorítmico. Esta situación aún presente en el aula de clase produce actitudes apáticas y de aversión hacia esta asignatura por parte de los estudiantes. En tal sentido, Núñez et al. (2005), encontraron que a medida que los estudiantes avanzan académicamente sus actitudes hacia las matemáticas se hacen más negativas. Para evitar esta situación se han diseñado diferentes marcos para la enseñanza para crear estrategias educativas más activas que promuevan el interés de los estudiantes. La integración de la tecnología al proceso de aprendizaje ha resultado motivante, sin embargo, su implementación está sujeta a aspectos, como el conocimiento y habilidades que los docentes y los recursos tecnológicos de las instituciones, entre otros (Díaz, 2017). En Colombia, en las zonas rurales es difícil implementar estas estrategias dadas las difíciles condiciones geográficas y la falta de recursos económicos, así que los docentes muchas veces se ven obligados a implementar otras estrategias. En el municipio de San Agustín (Huila) - Colombia, se ubica el parque arqueológico de San Agustín (patrimonio histórico de la humanidad UNESCO – 1995). Los vestigios de esta cultura ancestral son: construcciones funerarias megalíticas, estatuas, sarcófagos, tumbas, terraplenes, montículos y petroglifos. Tomando en cuenta la cercanía del municipio de Gallardo del parque de San Agustín, se diseñaron actividades didácticas utilizando la estatuaria agustiniana para enseñar el concepto de proporcionalidad a los estudiantes de grado décimo de secundaria.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Typically the teaching and learning of mathematics have been based on traditionalism, memory and algorithms. This situation still present in the classroom produces apathetic attitudes and aversion towards this subject on the part of the students. In this sense, Núñez et al. (2005) found that as students progress academically, their attitudes towards mathematics become more negative. To avoid this situation, different teaching frameworks have been designed to create more active educational strategies that promote student interest. The integration of technology into the learning process has been motivating, however, its implementation is subject to aspects, such as the knowledge and skills of teachers and the technological resources of the institutions, among others (Díaz, 2017). In Colombia, in rural areas it is difficult to implement these strategies given the difficult geographical conditions and the lack of economic resources, so teachers are often forced to implement other strategies. In the municipality of San Agustín (Huila) - Colombia, the archaeological

park of San Agustín is located (UNESCO World Heritage Site - 1995). The vestiges of this ancient culture are: megalithic funerary constructions, statues, sarcophagi, tombs, embankments, mounds and petroglyphs. Taking into account the proximity of the municipality of Gallardo to the San Agustín park, didactic activities were designed using the Augustinian statuary to teach the concept of proportionality to tenth grade high school students.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: Elizabeth Hurtado Martínez
C.C 40.775.889
Magister en Docencia de las Matemáticas

Nombre Jurado: María Elvira Carvajal Salcedo

C.C 41.522.255 de Bogotá

Magister en Educación

El Aprendizaje de la Proporcionalidad a través de la Matematización de las Esculturas Andaquíes

Luis Ernesto Fernández Hernández

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Docencia e Investigación Universitaria

Neiva

2023

El Aprendizaje de la Proporcionalidad a través de la Matematización de las Esculturas Andaquíes

Docencia e Investigación Universitaria

Luis Ernesto Fernández Hernández

Documento resultado de trabajo de grado para optar por el título de Magister en Educación.

Asesor: Mauricio Penagos

Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Docencia e Investigación Universitaria

Neiva

2023

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En el municipio de San Agustín – Huila – Colombia, está ubicado el parque arqueológico de San Agustín, que fue declarado patrimonio histórico de la humanidad por la UNESCO en 1995 (código C – 744). La cultura San-Agustiniana se caracterizó por las construcciones funerarias megalíticas y también por su estatuaria, pueden encontrarse alrededor de 400 estatuas de piedra, sarcófagos monolíticos, tumbas, terraplenes, montículos y petroglifos.

El sur del Huila se ha caracterizado por su importancia histórico cultural gracias a la herencia de la cultura agustiniana. Por tal razón, resulta pertinente proponer alternativas educativas que integren este aspecto cultural en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de esta región del país. Particularmente, direccionarla al aprendizaje de las matemáticas, pues los contenidos en esta ciencia suelen ser presentados de manera abstracta, alienada de la realidad de los estudiantes.

En este sentido, analizar el cómo se construyeron las estatuas Andaquíes y determinar qué conocimientos matemáticos están involucrados en su diseño, posibilita la planeación de actividades matemáticas realistas que involucren el contexto cultural de los estudiantes. Este tipo de actividades resulta pertinente porque, en la actualidad, más allá de enseñar conocimientos matemáticos se busca que el estudiante aprenda a utilizar éstos en los distintos escenarios de su vida cotidiana.

Así las cosas, con este proyecto de investigación se propone la realización de un estudio donde se analice el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemáticas (específicamente en el tema de proporcionalidad), cuando resuelven actividades de matematización de las esculturas Andaquíes con el uso del software GeoGebra.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del Problema de Investigación

La enseñanza de las matemáticas es un aspecto ampliamente estudiado por la comunidad científica de educadores. Durante años, los investigadores han enfocado sus esfuerzos para que nuevas metodologías de enseñanza sean empleadas en el aula de clase. Actualmente, la tecnología ha permeado las distintas áreas de la vida humana, incluida la educación, en donde se han propuestos modelos de enseñanza en los cuales se integran los conocimientos tecnológicos y pedagógicos con los del contenido para optimizar la acción pedagógica del docente, su capacidad para desarrollar el aprendizaje en sus estudiantes (Mishra y Koehler, 2006).

Sin embargo, y a pesar de la existencia de software especializados como GeoGebra, Cabri, Matlab, entre otros, suele encontrarse que los docentes hacen poco o nulo uso de estas herramientas, ya sea por la resistencia al cambio de su praxis, el desconocimiento de la implementación o por la falta de recursos en sus aulas (Mejía et al., 2018). En particular, las dos primeras razones pueden superarse por medio del acercamiento práctico de los conocimientos teóricos frutos de investigaciones y la puesta en escena de propuestas metodológicas orientadas, elementos que muestren a los docentes la existencia de secuencias didácticas, conjuntos de actividades estructuradas, su implementación y los posibles resultados positivos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Rojas et al., 2018). Estos elementos pueden generar un impacto en los docentes y su práctica.

Ahora bien, junto a esto, la enseñanza de las matemáticas también se enfrenta al problema de la falta de sentido y contextualización de las actividades que se implementan en el aula de clase, lo que genera en el estudiantado actitudes y creencias negativas hacia la matemática que dificultan el proceso de aprendizaje (2017). Este problema también puede superarse tomando en consideración la realidad como medio para la presentación del contenido, en las matemáticas particularmente, utilizarla como mediadora para la interacción con elementos y conceptos abstractos, volver tangible para el estudiante los objetos propios de la disciplina. Esto es, en esencia, lo que se propone en la matematización (Freudenthal, 1991), un proceso esencial para la vinculación de las matemáticas con la realidad del estudiante.

En este proceso, el estudiante se enfrenta a un problema de su entorno (Mundo Real) para transformarlo en estructuras matemáticas conocidas (Mundo Matemático), posteriormente, el estudiante hace uso de las herramientas matemáticas que posee para dar solución al problema (OCDE, 2005). Esto es realmente importante para ciertos objetos, relaciones y operaciones en las matemáticas que de otra forma sólo podrían manipularse mentalmente. Algunos conceptos matemáticos que se benefician de esta interacción mediada por elementos del entorno real son pilares fundamentales de otros más avanzados, tal es el caso de la proporcionalidad, relación en la cual se involucran el concepto de número, los números racionales, la fracción como representación y operación, relación de orden y operaciones básicas (Ramos y Martínez, 2020).

En particular, la enseñanza de este concepto se ha abordado desde distintas perspectivas instruccionales, secuencias didácticas basadas en ejemplos (Mochón, 2012), estrategias de resolución de problemas y el enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) (Martínez, Muñoz y Oller, 2019; Arroyave, 2018), actividades para propiciar aprendizaje significativo del concepto con situaciones didácticas (Serrano, 2017), implementación de la tecnología con el uso del software GeoGebra (Cortés y Cruz, 2018;

Gutiérrez, Prieto y Ortiz 2017), entre otros. El común denominador de estos trabajos son las dificultades del aprendizaje de este concepto.

En sentido, se han evidenciado problemáticas relacionadas tanto con la concepción de la proporcionalidad como relación, como las operaciones involucradas dentro de dicha relación y su aplicación en diversos contextos. Los estudiantes enfrentan estas dificultades derivadas principalmente del entendimiento erróneo de la proporcionalidad como el proceso de doblar o triplicar magnitudes; fallan en darle el sentido correcto de la relación entre dos valores; procedimentalmente confunden las operaciones necesarias para determinar las constantes de proporcionalidad o, ya teniendo éstas, en encontrar los valores de las cantidades relacionadas; y por último, aún cuando superan el tema procedimental, la evidencia apunta a que los desarrollos hechos por los estudiantes son de carácter memorístico, pues al intentar transferir sus conocimientos a otros escenarios, no logran hacerlo de manera efectiva (Torres y Deulofeu, 2018; Obando, Vasco y Arboleda, 2014).

Focalizando los esfuerzos en estas problemáticas, puede considerarse el abordaje de la enseñanza del concepto a través de las mencionadas estrategias de manera combinada. La resolución de problemas y en general el ABP, pueden favorecer el entendimiento del concepto, la comprensión correcta del mismo como relación entre magnitudes, además, si las situaciones problemas involucran constantes de proporcionalidad decimales y cantidades cuya relación se presente como fracciones, podría evitarse la asociación del concepto con los cálculos de doblar y triplicar cantidades. Por otro lado, la matematización da pie a la manipulación del concepto en escenarios reales, influyendo directamente en el proceso de transferencia de los conocimientos, si ésta se realiza en contextos significativos para los estudiantes y además se integran herramientas tecnológicas como el software especializado

GeoGebra, es posible obtener resultados óptimos en el avance de las capacidades de los estudiantes al trabajar con el concepto de proporcionalidad.

Es precisamente en este sentido en el cual se propone este trabajo, la generación de una secuencia didáctica que involucre la matematización en contextos significativos para el estudiante, que aborde problemas de proporcionalidad cuyas soluciones no sean triviales y alejen las asociaciones erróneas del concepto con la multiplicación por dos o tres, y la implementación del software especializado GeoGebra para la manipulación y dinamismo de las cantidades.

Ahora bien, analizando el contexto de los estudiantes de la Institución Educativa Gallardo, ubicada en el municipio de Suaza-Huila, a tan solo dos horas del municipio de San Agustín-Huila, lugar donde se desarrolla la investigación, resulta coherente fijarse en las estatuas Andaquíes, las cuales se encuentran en el parque arqueológico de San Agustín. De esta manera, analizando las dimensiones de estas esculturas (largo, ancho, alto, distribución del cuerpo), por medio de la matematización, es posible obtener algunas características numéricas que poseen y trabajar con ellas para determinar relaciones y proporcionalidad en estas estatuas monolíticas.

En suma, haciendo un análisis de las nuevas metodologías que favorecen y dinamizan el proceso de enseñanza cuando se integra la tecnología para diseñar actividades significativas y de interés para el estudiante, se propone diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad a través de la matematización de las esculturas Andaquíes a estudiantes de grado décimo de secundaria de la Institución Educativa Gallardo.

1.2. Línea de Investigación

Este estudio pertenece a la línea de investigación "Educación, Pedagogías Críticas y Didácticas Alternativas", según los lineamientos del posgrado Maestría en Educación de la Universidad Surcolombiana.

1.3. Justificación

La enseñanza de la matemática es un tema de gran importancia en la actualidad, pues esta área del conocimiento tiene aplicaciones en todos los aspectos de la vida humana. Según Cantoral y Farfán (2003), la sociedad ha conformado instituciones para incorporar las matemáticas y la ciencia en la sociedad con la intención de generar una visión científica del mundo. De esta manera, estos autores resaltan la necesidad de realizar modificaciones educativas en el campo de las matemáticas, con las cuales se planteen nuevos diseños más adaptados a las necesidades del estudiante actual.

Aunque el aprendizaje de las matemáticas es fundamental para la sociedad, gran parte de esta presenta dificultades para comprender y utilizar los conocimientos matemáticos. Esto es derivado principalmente de las metodologías empleadas que han generado en el colectivo estudiantil actitudes negativas y de rechazo hacia las matemáticas (Mazana, Suero y Olifage, 2019). El docente de esta área tiene el trabajo de cambiar estas creencias y actitudes que se han normalizado, pues, según Núñez et al., (2005), a medida que el estudiante avanza en su nivel educativo, la actitud hacia las matemáticas es cada vez más negativa.

"La imagen de la matemática se enmarca dentro la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad" (Freudenthal, 1991, p.32). Por lo anterior, no se debería hablar de matemáticas sin ligar esta al mundo real y en consecuencia, para enfrentar la problemática sobre las actitudes y creencias negativas hacia la matemática es necesario enseñar una matemática más realista.

Lo expresado anteriormente justifica la necesidad de implementar actividades más realistas y con significado y sentido para el estudiante, generando un proceso de aprendizaje más ameno y valioso.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Identificar el alcance de las capacidades de los estudiantes en el proceso de matematización con el concepto de proporcionalidad cuando se emplea una secuencia de actividades basadas en la resolución de problemas en el contexto de las esculturas Andaquíes.

1.4.2. Objetivos específicos

- Diseñar la secuencia didáctica basada en la matematización de las dimensiones de las esculturas Andaquíes y la resolución de problemas en este contexto.
- Aplicar la secuencia didáctica diseñada con los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Gallardo de Suaza-Huila-Colombia.
- Identificar los aprendizajes logrados por los estudiantes en cuanto al concepto de proporcionalidad a través del proceso de matematización de las esculturas Andaquíes.
- Determinar la influencia de la implementación de las secuencias didácticas con matematización sobre el aprendizaje de los estudiantes.

1.5. Preguntas de Investigación

1. ¿Cómo influye en el aprendizaje de los estudiantes, sobre el concepto de proporcionalidad, el empleo de una secuencia de actividades basadas en la matematización de esculturas Andaquíes?
2. ¿Cuáles son los alcances de las capacidades de los estudiantes en cuanto a la matematización de las dimensiones de las esculturas Andaquíes y su relación con la proporcionalidad?

CAPÍTULO 2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. Enseñanza de la Proporcionalidad

En la enseñanza de la proporcionalidad se han resaltado investigaciones en las que se implementan metodologías de enseñanza diferentes a las tradicionales para verificar su efectividad en el proceso de enseñanza aprendizaje. Por ejemplo, Mochón (2012), realizó un cuestionamiento a la enseñanza del razonamiento proporcional, pues este se presenta de manera limitada en el aula de clase al trabajar únicamente con la regla de tres. Por tal razón, el autor presenta a manera de secuencia didáctica varios ejemplos ilustrativos para el docente, con la intención de que éste realice un acercamiento didáctico y diferente a la noción de proporcionalidad.

Torres y Deulofeu (2018), explican la manera en que influye en el aprendizaje de una estudiante (Ainoa), la forma de enseñar de uno u otro profesor. El estudio de caso de Ainoa, permitió caracterizar su aprendizaje, con lo que se constató que: a) Entiende erróneamente el concepto de proporcionalidad, al asociar el concepto de proporcionalidad al hecho de doblar o triplicar magnitudes; b) No entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido; c) No establece puentes entre las técnicas de cálculo de que al doble o al triple de una magnitud le corresponde el doble o el triple de la otra, y la técnica de reducción a la unidad; d) No entiende la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales; e) No es capaz de conectar lo cualitativo con lo cuantitativo; y f) Entiende el concepto de proporcionalidad porque es capaz de utilizarlo de manera efectiva.

Martínez, Muñoz y Oller (2019), describen los resultados de una experiencia de enseñanza de la proporcionalidad con estudiantes de secundaria bajo el paradigma de investigación acción. Los resultados después de dos cursos de experimentación mostraron que las producciones de los estudiantes en cada tarea fueron enriquecidas en cuanto a razonamiento, técnicas y estrategias de resolución de problemas. Posterior a las primeras producciones, los estudiantes institucionalizaron el método de amalgamación de magnitudes y, al mismo tiempo, fueron estableciendo de forma natural otros métodos que dan indicio de un razonamiento proporcional avanzado.

En el contexto nacional se encuentran diversas investigaciones sobre este tema de estudio. Por ejemplo, Serrano (2017), Arroyave (2018), Cortés y Cruz (2018) y Sabogal (2019), en sus tesis de maestría, realizaron propuestas didácticas para favorecer el aprendizaje de la proporcionalidad a estudiantes de grado séptimo de secundaria. En el caso de Serrano (2017), se utilizó el aprendizaje significativo como estrategia metodológica. Además, en las actividades diseñadas se utilizaron situaciones de razón y proporción en diversos contextos, con lo cual se trabajó la transversalidad de las matemáticas con otras ciencias y la cotidianidad. Los resultados evidenciaron que el uso de actividades transversales incrementó la comprensión de los conceptos de razón y proporción, pues entre la prueba diagnóstica y la final, los resultados fueron más altos después de implementar la secuencia de actividades.

Arroyave (2018), implementó en su secuencia didáctica la metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas). Los resultados comparativos entre la evaluación diagnóstica y la evaluación posterior a la implementación de la secuencia de actividades evidenciaron que los resultados de los estudiantes mejoraron con respecto a los conceptos de razón y proporción. Además, la capacidad argumentativa ante preguntas sobre proporcionalidad mejoró significativamente. En este sentido, el uso de la secuencia didáctica basada en ABP, fortaleció el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta temática.

Cortés y Cruz (2018), implementaron una secuencia didáctica basada en la resolución de problemas con GeoGebra. Los resultados de la investigación muestran que los estudiantes avanzaron en lo referente a la comparación e identificación de razones, al mismo tiempo, en cuanto al impacto del uso del software GeoGebra para el aprendizaje de la proporcionalidad, se identificó un avance positivo en cuanto a interpretación y comparación de razones.

Con el propósito de facilitar el aprendizaje de la proporcionalidad simple (directa e inversa), Sabogal (2019), implementó en su secuencia de actividades, situaciones problema con el uso de la geometría dinámica (softwares interactivos, Cabri y GeoGebra). Los resultados finales en comparación con la prueba diagnóstica evidenciaron avances significativos respecto a la interpretación, justificación o argumentación de los procesos relacionados con los problemas sobre proporcionalidad. Además, la implementación de las actividades en las que se utilizó Cabri y GeoGebra, sirvieron para aumentar el nivel de interés y atención de los estudiantes, lo cual conllevo a una mayor participación y trabajo autónomo.

2.2. Matemática en la Estatuaria

Algunas investigaciones se han dirigido al estudio de la matemática en la estatuaria de las distintas culturas que han existido. Por ejemplo, Zalaya (2005), en su tesis doctoral realizó una revisión general sobre los antecedentes históricos de las relaciones entre las matemáticas y el Aarte, en particular entre la escultura y las matemáticas. De esta manera, perteneció a este análisis todo tipo de escultura en cuya concepción, diseño, desarrollo o ejecución es necesario la utilización de las Matemáticas. La estructura de clasificación de la escultura matemática se planteó en grupos principales de las diferentes áreas de las matemáticas y, a su vez, se dividió estos en los conceptos matemáticos más importantes utilizados en las esculturas.

Coronado (2007), hace un análisis de las artes liberales, por esto, muestra varios ejemplos de la existencia de proporciones matemáticas en la pintura, la arquitectura y la escultura. Este autor, muestra ejemplos en los que se aprecia la razón áurea, los números metálicos, los rectángulos pitagóricos, la proporción cordobesa y el canon de belleza. Al mismo tiempo, resalta la geometría que inició con el arte como la teoría de la perspectiva, la geometría proyectiva, la geometría descriptiva y el manierismo.

Tapia (2013), realizó un trabajo de modelamiento computacional y visual a los Moai de la Isla de Pascua. Esta autora, realizó un análisis estilístico detallado de los Moai, de los patrones recurrentes de diseño, proporciones y medidas, para diseñar un sistema de datos que contiene los atributos de las esculturas y, contiene mapas interactivos con distintos modos de visualización y el modelamiento en 3D de los Moai. Esta es una herramienta de escrito gráfica e interactiva con la que se puede analizar el registro arqueológico de los Moai.

2.2.1. Matemática en la estatuaria de San Agustín

El parque arqueológico de San Agustín también ha sido centro de grandes investigaciones. Más específicamente, hablando de la matemática involucrada en la estatuaria de esta civilización, hay algunas investigaciones como la de Rengifo (1966), quién planteó que las estatuas de San Agustín habrían sido diseñadas bajo el concepto de la proporción armónica, divina proporción o número de oro. Su trabajo permitió identificar que la estatuaria, en cuanto a composición, posee una geometría especifica, se basa en el concepto de planigrafía y sus elementos sustanciales son el rectángulo y el cuadrado.

Urbano (2010), al igual que Rengifo, realizó un estudio para determinar la geometría en las esculturas de San Agustín. Haciendo uso del programa Cabri Geometry II Plus, se realizó un acercamiento a los procesos de abstracción de los escultores para visualizar algunas transformaciones en la estatuaria de esta cultura. Los resultados muestran que los escultores manejaban, en el diseño de las esculturas, las transformaciones de traslación, rotación, simetría, figuras geométricas y ejes perpendiculares.

Toro-Zambrano (2014), realizó una reflexión filosófica sobre un ejemplar escultórico de San Agustín – Huila. La autora, desde una mirada filosófica trata una escultura agustiniana y a partir de ésta, analiza su cultura y entorno. Más específicamente, se realizó un mirar fenomenológico de la obra escultórica agustiniana. Es decir, ver los aspectos propios del arte en general, junto con el arte escultórico, poniendo en medio las teorías que se han establecido sobre cada ejemplar. A su vez, este mirar fenomenológico permitió analizar cuál es la esencia de la escultura agustiniana.

Velandia-Jagua (2015), realizó un estudio para determinar cómo fueron diseñadas y construidas las esculturas funerarias que caracterizan a la cultura arqueológica de San Agustín. Utilizando un compás de oro, el autor realizó una inspección de algunas estatuas características de esta cultura. Los resultados muestran que, el diseño de la estatuaria San-Agustiniana se fundamenta en la proporción armónica, sin embargo, en algunos casos no se cumple de forma estricta esta proporción.

2.2.2. Enseñanza de la matemática por medio de la estatuaria

Existen también investigaciones que se enfocan en la enseñanza de diversos contenidos, basados en la matemática involucrada en la estatuaria de otras culturas ancestrales. Por ejemplo, Ferrado y Segura (2013), diseñaron una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporción basados en la historia del arte; su objetivo fue enseñar el concepto de la proporción a partir de los diferentes usos y significados que se le han otorgado a través de la historia. Las actividades diseñadas integran un recorrido histórico-artístico de la proporción en el arte del Antiguo Egipto, Arte Griego y el diseño del centro de Atenas, para llevar al estudiante de una idea visual a una idea numérica del concepto de proporcionalidad.

Muy similar a la investigación anterior, Urbano (2018), en su tesis de maestría, se enfocó en el diseño de tareas utilizando ambientes de geometría dinámica y las representaciones geométricas de las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en estudiantes de grado quinto de primaria. Los resultados muestran que, desde una perspectiva Etnomatemática los estudiantes visibilizaron parte del conocimiento matemático de la civilización de San Agustín. También, se sugiere la utilización de material manipulativo antes de integrar al estudiante en un ambiente de geometría dinámica.

Por su parte, Gómez-Collado, Puchalt, Sarrió y Trujillo (2013), en su trabajo de investigación, estudian la modelización matemática de dos esculturas del artista Jaume Espí con el uso del programa Mathematica 8.0, para ser utilizadas en la enseñanza de las matemáticas de estudiantes de arquitectura.

2.3. Matematización

La matematización es un concepto que ha tomado gran importancia desde hace tres décadas aproximadamente. Freudenthal (1991), fue uno de los primeros investigadores en manifestar la importancia de conectar la enseñanza de la matemática con la realidad del estudiante. Bentancor (2017), en su tesis de maestría realizó un análisis para determinar la importancia que los docentes le dan al proceso de matematización en sus prácticas de enseñanza y de evaluación.

Algunas investigaciones han implementado actividades de matematización para determinar su efectividad en el proceso de enseñanza, por ejemplo, Pérez-Roa y Vásquez-Olave (2016), realizaron una investigación en la cual se compara el aprendizaje de las funciones cuando se emplea una metodología tradicional y cuando se emplea el enfoque de Educación Matemática Realista de Freudenthal. Los resultados muestran un incremento en el nivel de matematización de los estudiantes que trabajaron bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista, sin embargo, no se observaron diferencias en el aprendizaje del contenido en ambos grupos.

De forma similar, Gutiérrez, Prieto y Buitrago (2017), realizaron un estudio para analizar los procesos de matematización y trabajo matemático que realizan los estudiantes para representar una pieza que pertenece a la máquina de vapor tipo Newcomen. En el análisis de los procesos cognitivos de los estudiantes se identificó ocho episodios importantes que llevaron al estudiante a la generación de un modelo matemático para representar la pieza.

2.4. Resumen de la Literatura Revisada

La literatura revisada permitió identificar el estado de la investigación en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad, los resultados de las investigaciones evidencian un avance significativo en el aprendizaje de este contenido matemático, cuando se implementa una metodología de enseñanza activa y diferente a la tradicional.

Por otro lado, varias investigaciones se han dirigido hacia la identificación de la matemática que está involucrada en la estatuaria de las diferentes civilizaciones existentes. En particular, en la cultura San-Agustiniana se encontró que en la construcción de los ejemplares escultóricos hay involucrados ciertos conceptos matemáticos, como la proporcionalidad, las transformaciones de traslación, rotación, simetría, figuras geométricas y ejes perpendiculares. Finalmente, la implementación de actividades matemáticas realistas en el aula de clase refleja que el aprendizaje del estudiante es más significativo respecto a la enseñanza tradicional.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En este apartado se presentan las teorías que le permiten al docente diseñar actividades para la enseñanza de las matemáticas, las propuestas referidas son motivadoras, significativas y contextualizadas para el estudiante. Se inicia este capítulo con la teoría sobre el concepto de proporcionalidad, posteriormente, se resalta el aprendizaje sociocognitivo, la matematización y la visualización matemática, teorías con las cuales, las nuevas estrategias de enseñanza adecuadas a la realidad del estudiante pueden influir positivamente en el desarrollo de sus capacidades.

3.1. Proporcionalidad

3.1.1. Razón

En matemáticas, una razón es la comparación de dos cantidades por medio de la división o el cociente. La razón entre dos números a y b, con $b \neq 0$ es el cociente entre a y b, así como se observa en (1).

$$Razón\ entre\ a\ y\ b = \frac{a}{b} \quad (1)$$

3.1.2. Proporción

Cuando en una situación se considera la intervención de dos pares de números que se corresponden, se establece una proporción (Godino y Batanero, 2002). Es decir, una proporción es una igualdad entre dos razones numéricas, en la cual el producto de los extremos es igual al producto de los medios (2).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c \quad (2)$$

3.1.3. Magnitudes proporcionales

Dadas dos magnitudes A y B, se dice que son proporcionales si están correspondidas de tal manera que las medidas de las cantidades que se corresponden forman dos series de números proporcionales entre sí, es decir, existe un número k, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto de k con los valores correspondientes a la primera serie.

Tabla 1.
Series proporcionales

$\boldsymbol{Serie\ A}$	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
$\boldsymbol{Serie\ B}$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n

Dos magnitudes pueden ser directa o inversamente proporcionales. Las magnitudes A y B, así como se detallan en la Tabla 1, son directamente proporcionales si:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Por su parte, las magnitudes A y B, así como se detallan en la Tabla 1, son inversamente proporcionales si:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \cdots = a_n \cdot b_n = k$$

3.2. Aprendizaje Basado en Problemas

Barrows (1986) define el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), como un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto inicial para la obtención de nuevos conocimientos. Según este autor, el ABP tiene las siguientes características fundamentales:

- **El aprendizaje está centrado en el alumno:** bajo la orientación del maestro, el estudiante debe tomar la responsabilidad de su aprendizaje, es decir, debe identificar lo que debe conocer para entender el problema que está solucionando. Además, el estudiante debe determinar dónde obtener la información necesaria.
- **El estudiante se produce en grupos pequeños de estudiantes:** cambiar aleatoriamente de grupos con diferentes tutores le permite al estudiante adquirir destreza en el trabajo intenso y efectivo.
- **Los profesores son facilitadores o guías:** El profesor o facilitador es también denominado *tutor*. En este ambiente, según Barrows (1986), el rol de tutor se puede entender en términos de comunicación metacognitiva. Es decir, el profesor diseña preguntas que le ayudan al estudiante a entender y solucionar el problema en cuestión. Posteriormente, el estudiante va adquiriendo este rol, lo cual permite que se exijan entre sí.
- **Los problemas forman el foco de organización y estímulo para el aprendizaje:** el problema es el desafío que enfrentan los estudiantes en la práctica, con lo cual, se proporciona la importancia y el interés necesario para el aprendizaje. Con el objetivo de resolver el problema, el estudiante identifica lo debe aprender de las ciencias básicas, por lo tanto, el problema es el foco que permite la integración de las diferentes disciplinas.
- **Los problemas son un vehículo para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas:** esto implica que el problema que se le presenta al estudiante debe estar conectado con el mundo real o incluso relacionado con aplicaciones del contexto profesional en que se desempeñará el estudiante.

- **La nueva información se adquiere a través del aprendizaje autodirigido:** dado que el aprendizaje está centrado en el estudiante, se espera que este dirija su propio proceso de aprendizaje, a partir del conocimiento del mundo real y de su experiencia acumulada derivada de su estudio e investigación.

De acuerdo con Manzanares (2008), el aprendizaje basado en problemas contempla cuatro fases en su proceso. Inicialmente, se presenta al estudiante el problema cercano su realidad para que éste encuentre su solución. Posteriormente, se identifican las necesidades de aprendizaje que promueven la búsqueda de una respuesta apropiada. Finalmente, el aprendizaje de la información necesaria y la vuelta al problema cierran el ciclo, tal como se observa en la Figura 1. Este es un proceso que se desarrolla en grupo, de forma autónoma y con la orientación del profesor.

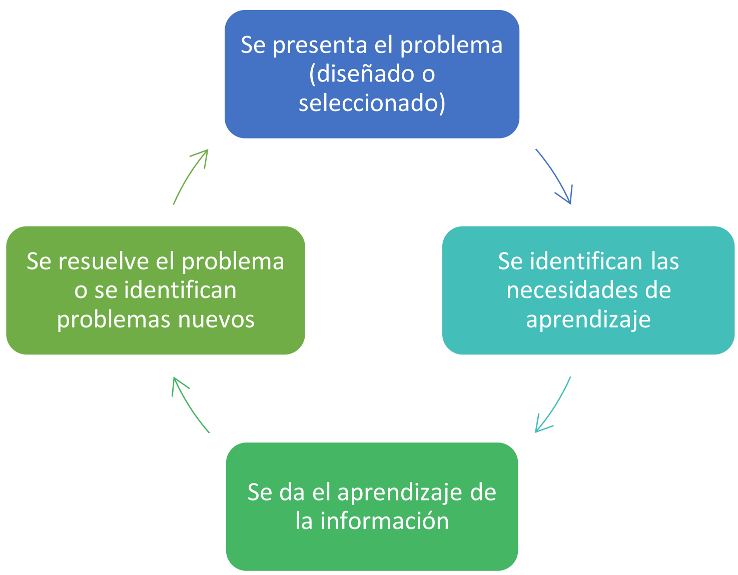


Figura 1. Fases del proceso del Aprendizaje Basado en Problemas (tomado de Manzanares, 2008)

Este proceso de Aprendizaje Basado en Problemas se desarrolla convencionalmente conforme a lo que se ha denominado los siete pasos (Manzanares, 2008):

1. Presentación del problema: escenario del problema.
2. Aclaración de terminología.
3. Identificación de factores.
4. Generación de hipótesis.
5. Identificación de lagunas de conocimiento.
6. Facilitación del acceso a la información necesaria.
7. Resolución del problema o identificación de problemas nuevos. Aplicación del conocimiento a problemas nuevos.

3.3. Matematización

La Matematización es un concepto que surge cuando Freudenthal (1991), puso en debate la necesidad de conectar la enseñanza de la Matemática con la realidad cercana del estudiante. Para la OCDE (2005), este es el proceso mediante el cual el estudiante confronta un problema de su realidad (Mundo Real), para transformarlo en estructuras matemáticas conocidas (Mundo Matemático) y posteriormente entrar a solucionar la situación problema.

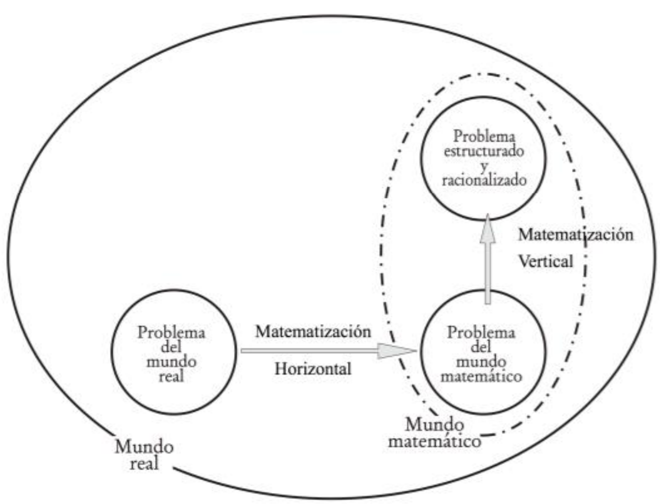


Figura 2. El proceso de matematización (tomado de Rico, 2007).

Como se observa en la Figura 2, en el proceso de matematización se distinguen dos etapas: la *Matematización Horizontal* y la *Matematización Vertical.* Según Rico (2007), la primera fase de este proceso es la *matematización horizontal* y es en la cual el estudiante traduce los problemas de su contexto al mundo matemático. Posteriormente, la *matematización vertical*, es la fase en la cual es estudiante utiliza conceptos y destrezas matemáticas para afrontar la problemática.

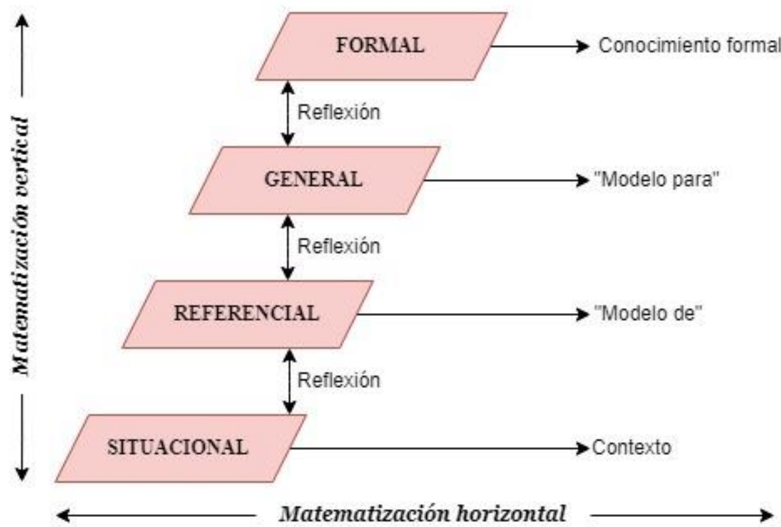


Figura 3. Niveles de Matematización (tomado de Rico, 2007).

Según Freudenthal (1991), la matematización se caracteriza por ser gradual, es decir, el estudiante se transita por distintos niveles de comprensión cada vez con mayor complejidad. En la Figura 3, se observan estos niveles (situacional, referencial, general y formal). El nivel situacional es el primer momento en el cual el estudiante interactúa con la situación problema, trata de interpretarla y, pone en juego las primeras estrategias que se relacionan con la problemática. En este nivel, según Freudenthal (1991), el estudiante desarrolla procesos basados en su conocimiento informal, en los que emplea estrategias que posibilitan visualizar, sintetizar, formular, explorar regularidades y determinar analogías que le permitan identificar la matemática integrada en el contexto del problema.

Posteriormente, al superar el nivel situacional, el estudiante transita hacia el nivel referencial, en el cual expresa las primeras representaciones que permite introducir modelos gráficos, manipulativos, notacionales y conceptuales que explican y describen la problemática.

Avanzando en los niveles de matematización, el estudiante se traslada al nivel general, en el cual reflexiona sobre los modelos utilizados en el nivel referencial para identificar que estos pueden ser empleados en problemas isomorfos al estudiado. De tal forma, cuando el estudiante comprende cómo funcionan los conceptos, recursos y técnicas matemáticas, se avanza al nivel formal para dar solución al problema.

3.4. Visualización Matemática

Desde hace algunos años diferentes investigadores han resaltado la importancia de emplear distintas representaciones de los conceptos matemáticos. Nesterov, Nesterova y Sussman (2000, pág. 9), exponen que, "los problemas reales en (el) tratamiento matemático podemos englobar(los) en tres bloques: el cálculo simbólico, el cálculo numérico y las representaciones gráficas".

Por otro lado, en vista de que los objetos matemáticos no son accesibles por medio de la percepción, o por una experiencia intuitiva inmediata, las distintas representaciones semióticas son completamente necesarias (Hitt, 1996).Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas, están constituidos por una variedad de contenidos visuales, que se pueden representar intuitivamente y geométricamente, que de cierto modo son útiles para la presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como el uso de los mismos para la resolución de situaciones problemas; además, se dice que los expertos poseen imágenes visuales y perciben los conceptos de manera intuitiva, de esta forma, son capaces de relacionar conceptos matemáticos complejos y seleccionan formas eficaces para la resolución de situaciones problemas (De Guzmán, 1996).

Las representaciones semióticas dentro del registro gráfico son herramientas de las cuales los estudiantes pueden abstraer información del objeto matemático que está siendo representado. Esto parte desde la percepción de la representación y se establece en la mente del individuo como un conjunto de características del objeto visto.

Con relación a esto, Hershkowitz et al. (1996), exponen por visualización “la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra" (pág. 163). De acuerdo con esto, se denomina la visualización en este trabajo de investigación como el proceso o actividad de transferencia de una figura a una imagen mental o viceversa (Torregosa y Quesada, 2007). Por lo tanto, la visualización da la posibilidad de ilustrar y explicar proposiciones, lo cual hace que ésta sea fundamental para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Marmolejo y Vega, 2012).

Duval (1995) define que, para que sea posible la visualización de un concepto, son necesarias tres tipos de Aprehensiones. Resalta que una figura puede contribuir a la percepción (aprehensión) de cualquier naturaleza. En este sentido, menciona que existen tres tipos de aprehensiones:

- **Aprehensión perceptiva:** se relaciona con la identificación simple de formas, figuras o conceptos geométricos que ayudan a construir un nuevo conocimiento, sin emplear definiciones formales que están presentes en el proceso de aprendizaje. Esta aprehensión se caracteriza por ser la que primero aparece en el proceso cognitivo del alumno (Torregosa y Quesada, 2007).
- **Aprehensión discursiva**: se refiere al proceso cognitivo en el cual se establece una relación de una de configuración, la cual se identifica por la construcción de afirmaciones matemáticas (declaración de definiciones, teoremas, axiomas, etc.) (García, Callejo y Fernández, 2015). Este proceso se puede realizar mediante un procedimiento llamada cambio de anclaje. Por ejemplo, el cambio de anclaje visual al discursivo, el cual sucede en el momento en que una representación gráfica se relaciona con una afirmación matemática, este cambio también pude darse en sentido contrario, cuando a una afirmación matemática se le relaciona una representación gráfica (Orozco, Morales-Morgado y Campos, 2016).
- **Aprehensión operatoria**: es cuando el estudiante es capaz de realizar una transformación física o mental a una configuración inicial, mediante la extracción, introducción o modificación de las diferentes subconfiguraciones para la resolución de una situación problema (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010). Dichas modificaciones se pueden realizar por medio de dos tipos de procesos: aprehensión operatoria de cambio figural y aprehensión operatoria de configuración. La primera se refiere "cuando a la configuración inicial se le añaden, quitan o modifican elementos lleva a la creación de nuevas subconfiguraciones" (Orozco, Morales-Morgado y Campos, 2016); la segunda es

> en el momento en que “las subconfiguraciones iniciales son manipuladas como las piezas de un tangram” (Orozco, Morales-Morgado y Campos, 2016).

El proceso de visualización es entonces un mecanismo mediante el cual se abstrae información de las representaciones semióticas con el fin de estructurar el conocimiento adquirido acerca del objeto matemático en cuestión. Esta estructuración del conocimiento es otro proceso que el estudiante realiza al aprender matemáticas y, por ende, se tuvo en cuenta para el planteamiento de la secuencia didáctica.

3.5. Diseño Instruccional y Planeación de la Secuencia

Para plantear el diseño instruccional de la secuencia didáctica se utiliza el Modelo de Diseño Instruccional ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo y Evaluación) (Branch, 2009). Grosso modo, ADDIE es un proceso sistemático y secuencial que se utiliza para desarrollar programas de entrenamiento y educación efectivos. Este modelo consiste en cinco fases interrelacionadas: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación. La fase de análisis implica identificar las necesidades de aprendizaje y los objetivos de formación. La fase de diseño implica el desarrollo de un plan detallado para alcanzar esos objetivos, incluyendo la selección de métodos y materiales de entrenamiento.

La fase de desarrollo implica la producción y prueba de los materiales y actividades. La fase de implementación es donde se lleva a cabo el programa de diseñado. Por último, en la fase de evaluación, se miden los resultados y se determina si se han alcanzado los objetivos de formación, y si es necesario, se realizan ajustes para mejorar el programa en el futuro.

El modelo ADDIE es ampliamente utilizado para el diseño de situaciones problemas realistas para la enseñanza de las matemáticas y el mejoramiento de habilidades críticas del pensamiento matemático (Chairil, Hairum y Suharna, 2020) y su estructura cíclica enfocada en el refinamiento del diseño permite optimizar la calidad de los recursos generados. Con base en el ABP y el modelo ADDIE, se diseñan las actividades dentro de la secuencia didáctica propuesta en esta investigación, sin embargo, debido a su carácter metodológico que pauta el desarrollo de parte del trabajo, su presentación más extendida se posterga al CAPÍTULO 4. Sección 4.5.

De igual manera sucede con la planeación y estructura de la secuencia didáctica, para la cual, en este caso, se consideró el Modelo Dinámico de Planeación Didáctica de Díaz-Barriga (2013). El autor, sobre una secuencia didáctica, describe que es una serie de actividades de aprendizaje ordenadas internamente, con el objetivo de hacer significativa la información a la cual los estudiantes accederán y los conocimientos y habilidades que desarrollarán.

En este sentido, la secuencia debe requerir que los estudiantes realicen acciones que vinculen sus conocimientos previos y experiencias con información sobre un objeto de conocimiento. La estructura de la secuencia está integrada por las propias actividades de aprendizaje y la evaluación para el aprendizaje, las cuales deben estar profundamente imbricadas. Con respecto a la evaluación para el aprendizaje, debe tenerse en cuenta que es un aspecto clave de la secuencia, ya que permite reorganizar el avance de la secuencia, con esto en mente, debe considerarse que los resultados de cada actividad de aprendizaje también hacen parte de la evaluación.

En una secuencia didáctica se integran los principios de aprendizaje con los de evaluación, teniendo en cuenta diferentes tipos, como la diagnóstica, formativa y sumativa. La construcción de una secuencia de aprendizaje y evaluación deben ir de la mano y ser elementos mutuamente influyentes (Díaz-Barriga, 2013). La reflexión sobre las actividades de evaluación es importante para lograr una visión integral de las evidencias de aprendizaje y superar la perspectiva de sólo aplicar exámenes, a la vez que permite identificar el alcance logrado por los estudiantes en los procesos que se abordan dentro de las actividades.

La forma en la cual se implementan los elementos del Modelo Dinámico de Planeación Didáctica se extiende en el Marco Metodológico (CAPÍTULO 4.), con el uso de las características descritas por el autor para el planteamiento de las actividades, específicamente en la Sección 4.6.

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

4.1. Resumen del Estudio

Con la intención de dar respuesta a las preguntas planteadas en la presente investigación, se diseñó una secuencia didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad, basada en actividades de matematización de esculturas Andaquíes con el uso de GeoGebra. Junto a esto, se realizó una prueba pretest para determinar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a esta temática y, posterior a la implementación de la secuencia didáctica, se realizó una prueba post test para determinar si el empleo de la secuencia diseñada influyó en el aprendizaje de los estudiantes sobre proporcionalidad. Además, se realizó un análisis de los productos de los estudiantes para describir su proceder en el proceso de adquisición del conocimiento matemático enseñado.

4.2. Diseño de la Investigación

Esta investigación se realizará tomando en consideración los lineamientos del enfoque de investigación mixto. Según Hernández-Sampieri & Torres (2018), la utilización de los métodos mixtos surge de la naturaleza compleja de algunos fenómenos o problemas de investigación que requieren la combinación de esfuerzos cualitativos y cuantitativos. Así las cosas, los datos de tipo cuantitativo recolectados serán calificaciones numéricas de las actividades, datos del pre y post test, y datos provenientes de encuestas; y de carácter cualitativo los que se derivan de observaciones del fenómeno en el aula, entrevistas a los estudiantes y demás aspectos que complementan el estudio.

El tipo de investigación es descriptiva, pues, Danhke (citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2003), señala que, “los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p. 117). Así pues, en este estudio se busca especificar las características del proceso de aprendizaje cuando se implementa una secuencia didáctica con actividades de matematización de esculturas con el uso de GeoGebra.

4.3. Población y Muestra

La población son los estudiantes de la Institución Educativa Gallardo de Suaza-Huila-Colombia. La muestra está conformada por 22 estudiantes de grado décimo de secundaria, sus edades oscilan entre 14 y 17 años. Estos sujetos de estudio se caracterizan por ser individuos que viven en esta región, la cual corresponde a la zona rural del municipio de Suaza.

4.4. Fases de Investigación

- **Fase 1. Diagnóstico:** en la que se hace una revisión de literatura sobre el problema, se observa el fenómeno en el aula, se cuestiona a docentes y estudiantes, y, en términos generales, se busca la definición completa del problema de investigación y la reestructuración (de ser necesaria) del objetivo general del estudio.
- **Fase 2. Diseño:** Además de la concreción del marco teórico que sustenta el estudio, se analizan, diseñan, desarrollan, implementan y evalúan las actividades que se utilizarán para la intervención educativa.
- **Fase 3. Trabajo de Campo:** como su nombre lo indica, es el trabajo del investigador en el campo de acción, donde interactúa con la población objetivo; allí se aplican instrumentos, se recolectan datos y se evalúa la implementación.

- **Fase 4. Análisis de Resultados:** con los datos recopilados, se procede al análisis cuantitativo y cualitativo, con el fin de responder a las preguntas de investigación planteadas y determinar si se alcanzaron los objetivos específicos y el general. En esta fase, al mismo tiempo, se construye y consolida el documento escrito que se reportará como tesis.

4.5. Diseño Instruccional

El modelo instruccional que se empleó para el diseño de la secuencia didáctica fue el de Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación (ADDIE), el cual, Branch (2009), lo define como un prototipo que integra cinco etapas para la creación de recursos educativos, con el fin de mantener una alineación entre las diferentes necesidades, propósitos, objetivos, metas, estrategias y evaluaciones durante todo el proceso.

También, se tuvo en cuenta que al final de cada fase se evaluara con el propósito de identificar si se cumplían los objetivos educacionales. En la Figura 4 se puede apreciar como el producto final de una fase representa el punto de partida de la siguiente, así como la revisión de cada fase.

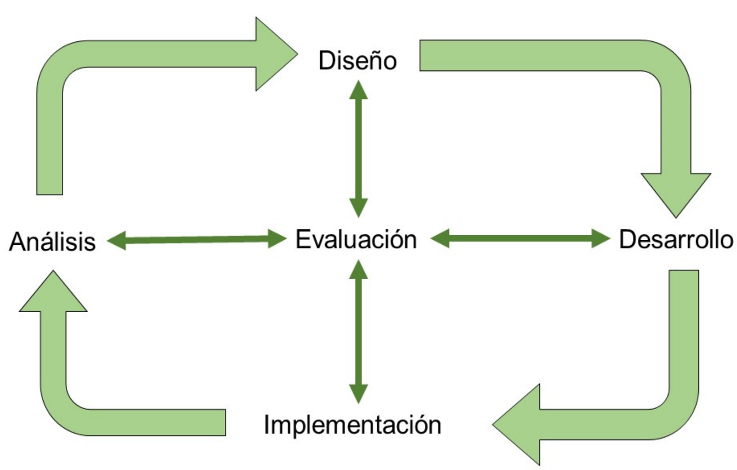


Figura 4. Proceso ADDIE con base en Branch (2009).

A continuación, se describe cada elemento del acrónimo ADDIE, los cuales fueron tomados de Belloch (2017).

- **Análisis:** el paso inicial es analizar a los estudiantes, el contenido y el entorno, cuyo resultado será la descripción de una situación y sus necesidades formativas.
- **Diseño:** se desarrolla un programa del curso deteniéndose especialmente en el enfoque pedagógico y en el modo de secuenciar y organizar el contenido.
- **Desarrollo:** la creación real (producción) de los contenidos y materiales de aprendizaje basados en la fase de diseño.
- **Implementación:** ejecución y puesta en práctica de la acción formativa con la participación de los alumnos.
- **Evaluación:** en esta fase se lleva a cabo la evaluación formativa de cada una de las etapas del proceso ADDIE y la evaluación sumativa, mediante pruebas específicas para analizar los resultados de la acción formativa.

De esta manera, basados en el entorno y las necesidades formativas del estudiante, se desarrolló e implementó una secuencia didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad, al mismo tiempo, se realizó una evaluación para determinar la efectividad de la secuencia de actividades.

4.6. Diseño de la Secuencia Didáctica

Una secuencia didáctica constituye la organización de actividades de aprendizaje que se realizan con la finalidad de crear situaciones para desarrollar un aprendizaje significativo en el estudiante; es un instrumento que requiere del conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y de la experiencia y visión pedagógica del profesor (Díaz-Barriga, 2013).

El mismo académico considera que la estructura de la secuencia didáctica debe tener un orden específico, que permita vincular las nociones previas del estudiante con situaciones problema y de contextos reales para que la información a la que acceda el estudiante durante el desarrollo de la secuencia sea significativa; es decir enfatiza en la necesidad de implementar problemas matemáticos conectados contexto del estudiante. Al mismo tiempo, el proceso de evaluación está ligado de manera paralela con el desarrollo de la secuencia de actividades. En tal sentido Díaz-Barriga (2013), arguye que, en el aula de clase el proceso de aprendizaje y evaluación están imbricados; por esta razón, en la secuencia se integra el proceso de evaluación en sus tres dimensiones: diagnóstica, formativa y sumativa.

En cuanto a planeación, se propone un modelo dinámico, en la Figura 5, se puede observar que, todos los factores de este proceso están relacionados entre sí.

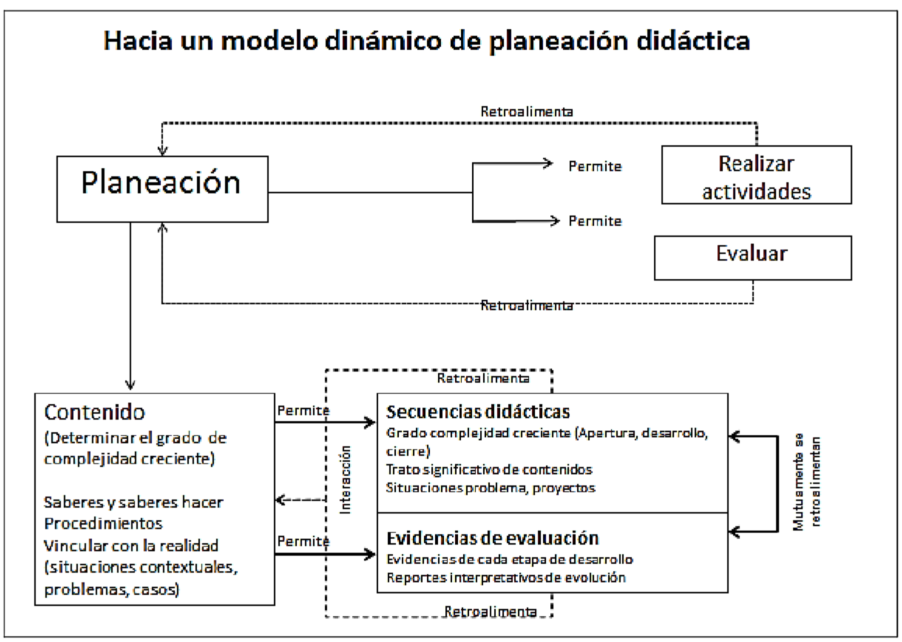


Figura 5. Modelo dinámico de planeación didáctica (Tomado de Díaz-Barriga, 2013).

Por lo anterior, tomando en cuenta las bases planteadas por Ángel Díaz Barriga para el diseño de una secuencia didáctica y el formato de construcción de esta guía, la secuencia propuesta se detalla en la siguiente Tabla.

Tabla 2.
Secuencia didáctica

<table>
<tr><td>Asignatura</td><td>Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Unidad temática</td><td>Razón y Proporción</td></tr>
<tr><td>Tema general</td><td>Proporcionalidad</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>• Razón
• Proporción
• Proporcionalidad directa
• Proporcionalidad inversa
• Proporcionalidad compuesta</td></tr>
<tr><td>Duración de la secuencia</td><td>3 horas</td></tr>
<tr><td>Número de sesiones previstas</td><td>Sesión 1: Apertura
Sesión 2: Desarrollo
Sesión 3: Cierre</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>El estudiante analiza, comprende y aplica la proporcionalidad en un contexto geométrico real.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Orientaciones generales para la evaluación:
La evaluación durante la aplicación de la secuencia didáctica se realizará tomando en consideración el trabajo realizado por el estudiante al resolver las actividades planteadas, así como los resultados obtenidos de las actividades. Además, se realizará un pretest y post test para determinar el avance en el aprendizaje de la proporcionalidad al implementar la guía didáctica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Línea de secuencias didácticas
Actividades de apertura:
• Actividad 1: “Tu Cabeza de Chamán”
Actividades de desarrollo:
• Actividad 2: “Las medidas del segundo Chamán”
Actividades de cierre
• Actividad 3: “Reconstruyendo la cara triangular”
Cada actividad es especificada a continuación en las tablas Tabla 3, Tabla 4 y Tabla 5.</td></tr>
</table>

Línea de evidencias de evaluación de aprendizaje Se recopilará como evidencia los resultados de las preguntas de cada actividad implementada y el documento de GeoGebra en el que trabajaron los estudiantes.
Recursos: Fotocopias, computadores o tabletas y software didáctico (GeoGebra)

A continuación, se detalla cada actividad de la línea de secuencias didácticas que se implementarán. En la Tabla 3, se detalla la Actividad 1, esta pertenece a la sesión 1 de la secuencia didáctica.

Tabla 3.
Actividad 1

Título de la Actividad: "Tu Cabeza de Chaman"
Objetivo de Aprendizaje:
El estudiante será capaz de realizar cálculos de proporción directa para la determinación de longitudes, basado en la situación planteada a través de una estatua de San Agustín.
Orientaciones Metodológicas:
La actividad es presentada como parte del diseño instruccional de la clase. En el grupo en general, los estudiantes realizan un análisis de la situación planteada. La intención es la comprensión de la relación existente entre las longitudes de la estatua y el hombre de la fotografía. Estas relaciones son de proporcionalidad directa. Posterior a la resolución de las preguntas planteadas, el docente institucionaliza el contenido.
Cuerpo de la Actividad:
Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los compañeros de la clase. **Situación:** En la siguiente fotografía, aparece el joven Carlos, que sobresale por encima de una de las estatuas que representa un chamán (hay varias de las mismas por el parque de San Agustín). La cabeza de Carlos mide 18 cms de ancho (de oreja a oreja). Mientras que la cabeza del chamán, de borde a borde, mide casi 54 cms.

1. ¿Cuántas cabezas de Carlos caben a lo ancho de la cabeza del Chamán?
2. Si te dijera que la nariz del Chamán es cuatro veces más pequeña de ancho que su cabeza, ¿Podrías saber cuánto mide?
3. ¡Y la boca! Resulta que el ancho de la boca del chamán es 3/5 del ancho de su cabeza. ¿Cuánto mide la boca del chamán? Si se tiene la misma proporcionalidad con la boca de Carlos, ¿podrías decir cuánto mide?
4. ¿Por cuánto habría que multiplicar el ancho de tu boca para llegar al tamaño de la boca del Chamán?

A continuación, se detalla la Actividad 2, la cual pertenece a la sesión 2 de la secuencia didáctica.

Tabla 4.
Actividad 2

Título de la Actividad: "Las medidas del segundo Chamán"
Objetivo de Aprendizaje:
El estudiante será capaz de realizar cálculos de proporción directa e inversa para la determinación de longitudes, basado en la situación planteada a través de una estatua de San Agustín.
Orientaciones Metodológicas:

La actividad es presentada como parte del diseño instruccional de la clase, para que los estudiantes realicen un análisis de la situación planteada. En el grupo en general, los estudiantes realizan un análisis de la situación planteada. La intención es la comprensión de la relación existente entre las dimensiones de la estatua. Estas relaciones son de proporcionalidad directa e inversa. Posterior a la resolución de las preguntas planteadas, el docente institucionaliza el contenido.

Cuerpo de la Actividad:

Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los compañeros de la clase.

Situación:

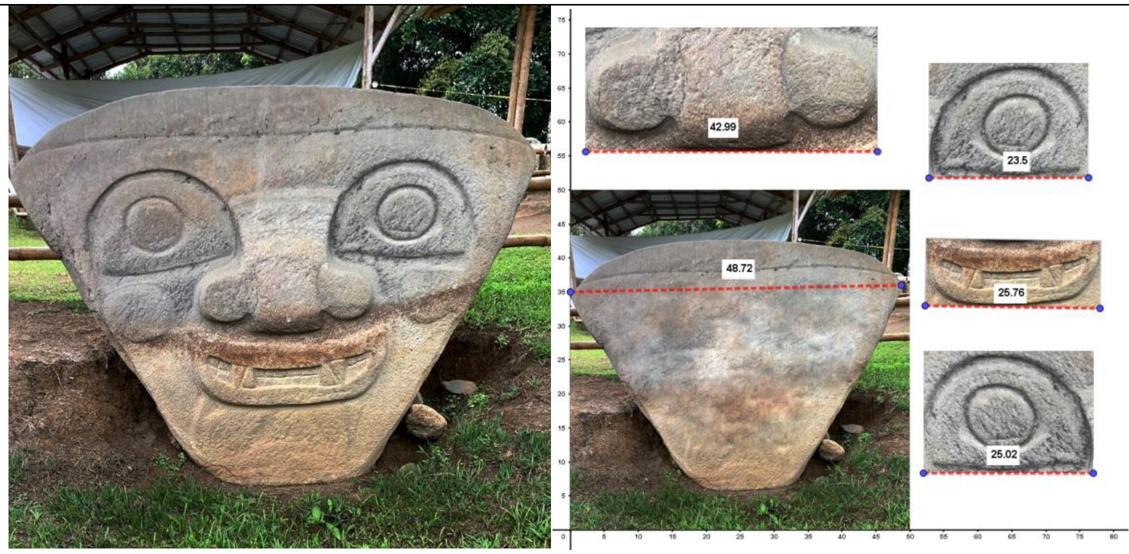
En las siguientes fotografías está otro de los chamanes del parque de San Agustín. En este caso, se tiene la información sobre la longitud de horizontal de sus ojos (10 cms); y se tiene la relación entre esta medida y el resto de las longitudes marcadas por colores. Necesitarás entender cómo utilizar dichas relaciones, pues se requiere escribir cada longitud sobre la figura.

1. Las de color amarillo miden $\frac{4}{5}x$.
2. Las de color azul miden $\frac{4}{3}x$.
3. El tamaño de las de color rosado es $2.5x$
4. La longitud de las de color verde es $3x$.
5. Las de color morado miden $3.2x$.

A continuación, se detalla la Actividad 3, la cual pertenece a la sesión 3 de la secuencia didáctica.

Tabla 5.
Actividad 3

Título de la Actividad: “Reconstruyendo la cara triangular”
Objetivo de Aprendizaje:
El estudiante será capaz de realizar cálculos de proporción directa e inversa para la determinación de longitudes, basado en la situación planteada con base en una estatua de San Agustín.
Orientaciones Metodológicas:
La actividad es presentada como parte del diseño instruccional de la clase. En el grupo en general, los estudiantes realizan un análisis de la situación planteada. La intención es la comprensión de la relación existente entre las longitudes de la estatua. Estas relaciones son de proporcionalidad directa e inversa. Para esto, el estudiante deberá utilizar el documento de GeoGebra Anexo a la actividad. Posterior a la resolución de las preguntas planteadas, el docente institucionaliza el contenido.
Cuerpo de la Actividad:
Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los compañeros de la clase. **Situación:** En las siguientes fotografías está la estatua conocida como el rostro triangular. A la izquierda se tiene la estatua completa y a la derecha cada una de sus partes por separado. Se sabe que la longitud más ancha de la figura es 48,72 cms y se pretende establecer cuáles son las longitudes reales de los ojos, boca y nariz. Para hacer lo anterior, se deberá ir modificando el tamaño de los elementos (arrastrando los puntos azules de las esquinas de las partes, en GeoGebra) y reubicándolos en su posición, tomando para ello la imagen de la estatua original de referencia.



1. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad por la que habría que multiplicar el tamaño más ancho de la figura de tal manera que se obtenga el tamaño del ojo derecho? ¿y cuál es para el ojo izquierdo?
2. ¿Por cuál constante habría que multiplicar el tamaño de la nariz para que el resultado sea el valor más ancho dado de la cara (48,72cms)?
3. Con respecto a la boca, ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que nos serviría para calcular el valor del tamaño correcto de la boca en función del tamaño conocido?

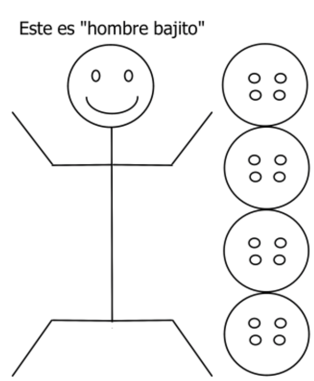
4.7. Métodos y Técnicas de Recolección de Datos

Por medio de la aplicación de un Pretest se medirán los conocimientos sobre proporcionalidad con los que cuentan los sujetos del estudio al iniciar el proceso. Posteriormente, se realizará una intervención educativa basada en una secuencia de actividades sobre la matematización de las esculturas Andaquíes con el uso de GeoGebra, en la cual cada producto de los estudiantes será evaluado para recopilar la cuantificación de su desempeño. Finalmente, se aplicará un Post test para identificar el avance en el aprendizaje sobre proporcionalidad que tuvieron los estudiantes.

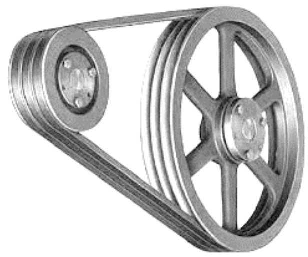
4.7.1. Pretest y Post test

El pretest y post test están constituidos por el mismo conjunto de ítems, enfocados a evaluar los conocimientos previos y adquiridos, antes y después de la secuencia, respectivamente. Esto se decide en función del diseño metodológico planteado, pues se requiere equivalencia entre los dos exámenes para poder realizar comparaciones entre los resultados obtenidos y así determinar el avance real en el dominio de los conceptos evaluados (Brogan y Kutner, 1980). Los exámenes poseen 10 preguntas, organizadas en función de su dificultad y temática relacionada (proporcionalidad directa, inversa y compuesta). A continuación, se detalla cada uno de los ítems:

1. Se tiene que el futbolista A, ha marcado 26 goles en los 22 partidos que ha jugado; mientras que el futbolista B, ha marcado 32 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador? ¿Porqué?
2. En un plano de una ciudad elaborado a escala por un arquitecto, una calle de 300 metros de longitud mide 2,5 cm. ¿Cuánto medirá sobre el mismo plano otra calle de 200 metros?
3. La altura de “hombre bajito” es cuatro botones, mientras la altura de “hombre alto” es 6 botones. Si usamos clips, la medida de “señor bajito” es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de “señor alto” medida con clips?



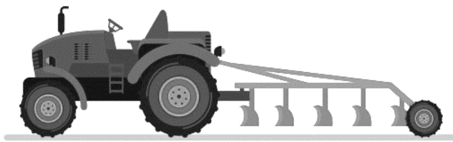
4. Dos ruedas están unidas por una correa de transmisión en un vehículo. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas. ¿Cuántas vueltas dará la segunda?



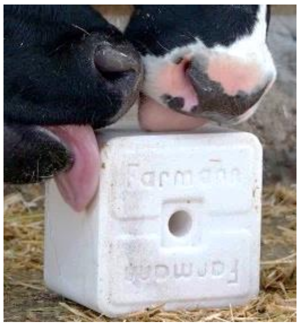
5. Seis obreros enlosan 1200 metros cuadrados de suelo en cuatro días. ¿Cuántos metros cuadrados enlosarán 12 obreros en cinco días?

6. Por ir a recoger café durante 5 días, Carlos ha recibido \$450.000. Como quiere comprarse una moto que le cuesta \$4’500.000, ¿Cuántos días más deberá trabajar recogiendo café en el mismo sitio?

7. Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por $1’750.000. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante 8 días?
8. Un arado de cinco rejas trabaja una hectárea de tierra en 1 hora y media. Si lo contratan para arar 15 hectáreas y cobra $280.000 por hora, ¿Cuánto tendrá que pagar el dueño de la finca por el trabajo?



9. Una llave de agua abierta 9 horas durante 8 días ha arrojado 5400 litros. ¿Cuántos litros arrojará durante 18 días si se abre durante 8 horas diarias?
10. Con 12 kilogramos de sal mineralizada, dos vacas comen durante 7 días. Un campesino quiere saber cuánto le durará la sal si compra sólo 8 kilos. ¿En cuántos días se comerán esa sal las vacas?



CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos que se obtuvieron con la aplicación de la secuencia didáctica. El análisis se divide en dos secciones principales: en la primera se describe el proceder de los estudiantes en el desarrollo de las actividades en la secuencia didáctica, priorizando la evidencia que se encuentra sobre aciertos, errores y confusiones que aparecen en el desarrollo. En la segunda se analiza el avance cuantitativo que se vislumbra por medio de los resultados de las pruebas pre y post test.

5.1. Actividades de la Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica se dividió en tres sesiones: Apertura, Desarrollo y Cierre. En total, se hicieron se hicieron tres actividades a lo largo de la implementación de estas tres sesiones, abarcando en éstas cada uno de los temas del contenido que se integró en la secuencia: Razón, Proporción, Proporcionalidad directa y Proporcionalidad Inversa.

5.1.1. Apertura

Para la primera sesión se designó la Actividad 1: "Tu Cabeza de Chamán", la cual tuvo como objetivo que el estudiante realizara cálculos de proporción directa para determinar para la determinación de longitudes, basado esto en la matematización de las estatuas de San Agustín. La versión para estudiantes de esta actividad se encuentra en el Anexo A.

Dentro de la actividad se le presentó a cada estudiante la imagen de la Figura 6, acompañada de un texto en el cual se le pedía que estableciera la relación entre las longitudes de la estatua y las longitudes de la cabeza del individuo de la fotografía.

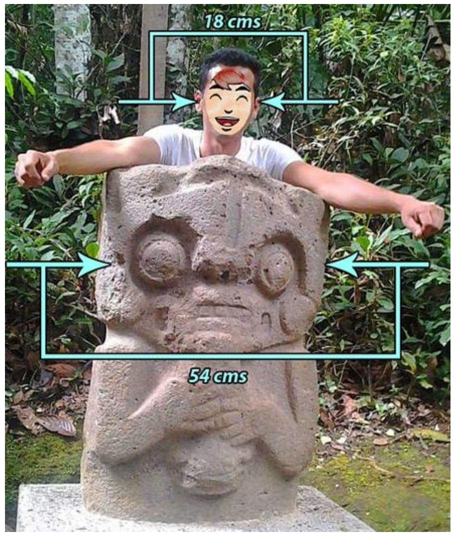


Figura 6. Relación entre longitudes Actividad 1.

Se formuló un conjunto de preguntas para guiar el proceso del estudiante en la determinación de relaciones y así generar la matematización buscada y la comprensión deseada. Algunas respuestas de los estudiantes a estas preguntas pueden verse en la Figura 7. La primera pregunta estaba enfocada en la generación de compromiso por parte del estudiante en la resolución de la actividad. Consistió simplemente en medir la longitud de su propia cabeza y compararla con la del chamán de la imagen. Esto resulta indispensable en los procesos de matematización, pues si el estudiante no está comprometido con el desarrollo de la actividad, no se logrará el objetivo de aprendizaje planteado (Freudenthal, 1991). Los estudiantes midieron su cabeza, pusieron su medida y la compararon con la del chamán de la fotografía.

Para la siguiente pregunta se pide establecer una relación de proporción directa entre la cabeza de *Carlos* (el hombre de la fotografía) y la cabeza del chamán: "¿Cuántas cabezas de Carlos caben a lo ancho de la cabeza del Chamán?". El proceso que debían desarrollar los estudiantes para resolver esa pregunta era el establecimiento de la proporción entre la longitud de la cabeza de Carlos (18 cms) y la del Chamán, (54 cms), es decir, 1 a 3. La respuesta sería que en lo ancho de la cabeza del Chamán cabrían 3 cabezas de Carlos.

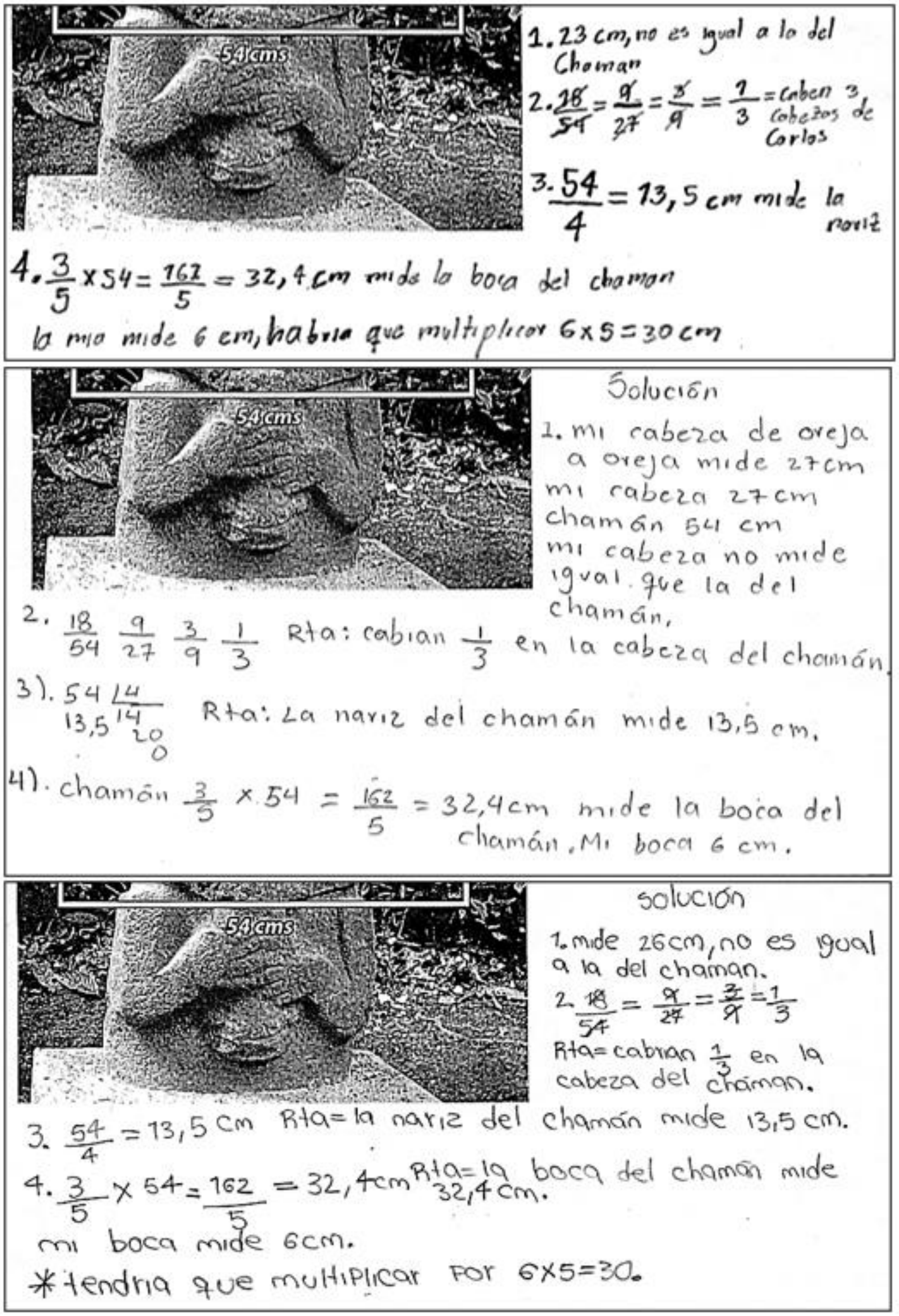


Figura 7. Algunas respuestas de los estudiantes a la Actividad 1.

De acuerdo con las respuestas ofrecidas por os estudiantes en la Figura 7, el camino que escogieron los estudiantes fue realizar un proceso de simplificación de la fracción $\frac{18}{54}$ llegando al resultado $\frac{1}{3}$, lo que les daría la respuesta correcta, sin embargo, su conclusión, en los dos últimos ejemplos, fue que "cabía" esa fracción de veces la cabeza de Carlos. En el primer ejemplo se ve cómo el estudiante concluye correctamente que caben 3 cabezas de Carlos en el ancho de la cabeza del Chamán. Esta confusión puede a esta extrema relación entre lo que es una proporción y lo que es una razón o un fraccionario, descrita por Im y Jitendra (2020), la cual se debe a que desde que empezaron con el concepto, siempre se utilizó dicha representación semiótica del registro numérico. Este error es común, pues solamente 9 de los 19 estudiantes que participaron en la actividad concluyeron correctamente, a pesar de que todos hicieron la división o simplificación de manera adecuada.

La tercera pregunta, relacionada con el tamaño de la nariz del Chamán, afirmaba que era cuatro veces más pequeña en comparación con el ancho de su cabeza. En esta pregunta bastaba con dividir el ancho de la cabeza del Chamán entre cuatro y así obtener la respuesta, esto es $54 : 4 = 13{,}5$. Como se observa en los ejemplos, el planteamiento fue resuelto por los estudiantes de esa manera, el total de los estudiantes lo respondió correctamente.

La última pregunta relacionaba varios elementos al mismo tiempo y sintetizaba lo que se buscaba en esta actividad "¡Y la boca! Resulta que el ancho de la boca del chamán es 3/5 del ancho de su cabeza. ¿Cuánto mide la boca del chamán? Si se tiene la misma proporcionalidad con la boca de Carlos, ¿podrías decir cuánto mide? ¿Por cuánto habría que multiplicar el ancho de tu boca para llegar al tamaño de la boca del Chamán?".

En los ejemplos de la Figura 7 puede observarse que los estudiantes, en efecto, determinaron la longitud de la boca del Chamán tal como se anticipó, es decir, multiplicando $\frac{3}{5}$ por la longitud del ancho de su cabeza, lo cual dio $32{,}4\, cm$. Curiosamente, en los estudiantes que resolvieron completamente la actividad, se encontró que todos tomaron como 6 centímetros la longitud de su propia boca, dando así un valor de 5,4 veces el tamaño en relación la del Chamán. Seguramente alguno de sus compañeros se midió y los demás sólo tomaron ese valor como propio, haciendo que todos los que resolvieron la actividad tuvieran los mismos datos.

En síntesis, en la Figura 8 se puede apreciar la distribución de puntajes obtenidos en esta actividad por parte de los 19 estudiantes que la realizaron. Se evaluó cada una de las preguntas en tres niveles con tres valores: incorrecta (0 puntos), correcta incompleta (0.5), correcta completa (1 punto), para un total de 4 puntos máximos en esta actividad.

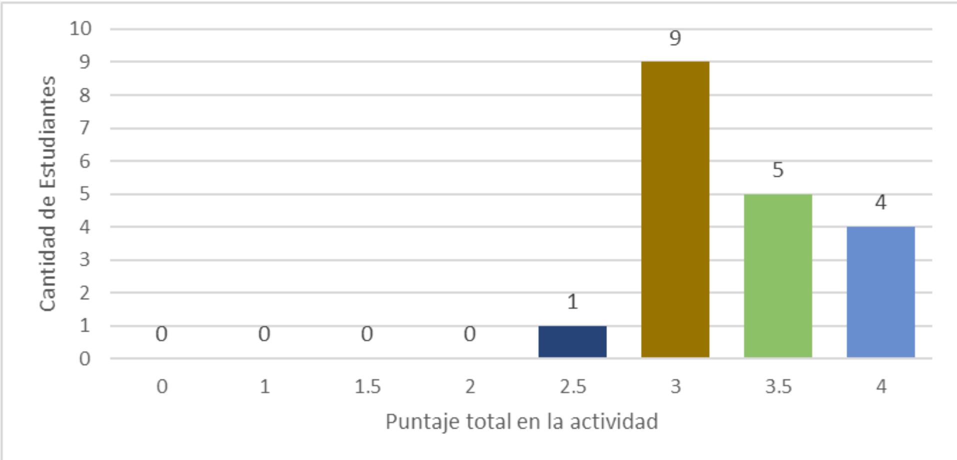


Figura 8. Distribución de resultados de los estudiantes en la Actividad 1.

5.1.2. Desarrollo

La Unidad 2, denominada Desarrollo, contó con la actividad: “Las medidas del segundo Chamán”. La versión de los estudiantes de esta actividad se encuentra en el Anexo B.

En esta actividad se tuvo como objetivo la realización por parte de los estudiantes de cálculos para la determinación de proporciones directas e inversas en la matematización de dos estatuas de San Agustín. En la Figura 9 se observan las estatuas con los elementos dispuestos para la elaboración del proceso de matematización.

Figura 9. Estatuas de San Agustín de la Actividad 2.

En este caso, se estableció una longitud base, la marcada con color rojo entre los ojos, de 10 cms, y un conjunto de proporcionalidades para las demás longitudes, a saber: Las de color amarillo miden $\frac{4}{5}\ x$; Las de color azul miden $\frac{4}{3}x$; El tamaño de las de color rosado es

$2{,}5x$; La longitud de las de color verde es $3x$; Las de color morado miden $3{,}2x$. Con estos elementos, el estudiante debía determinar las longitudes de cada una de las líneas sobre la imagen. En la Figura 10 pueden observarse algunos ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes en esta actividad.

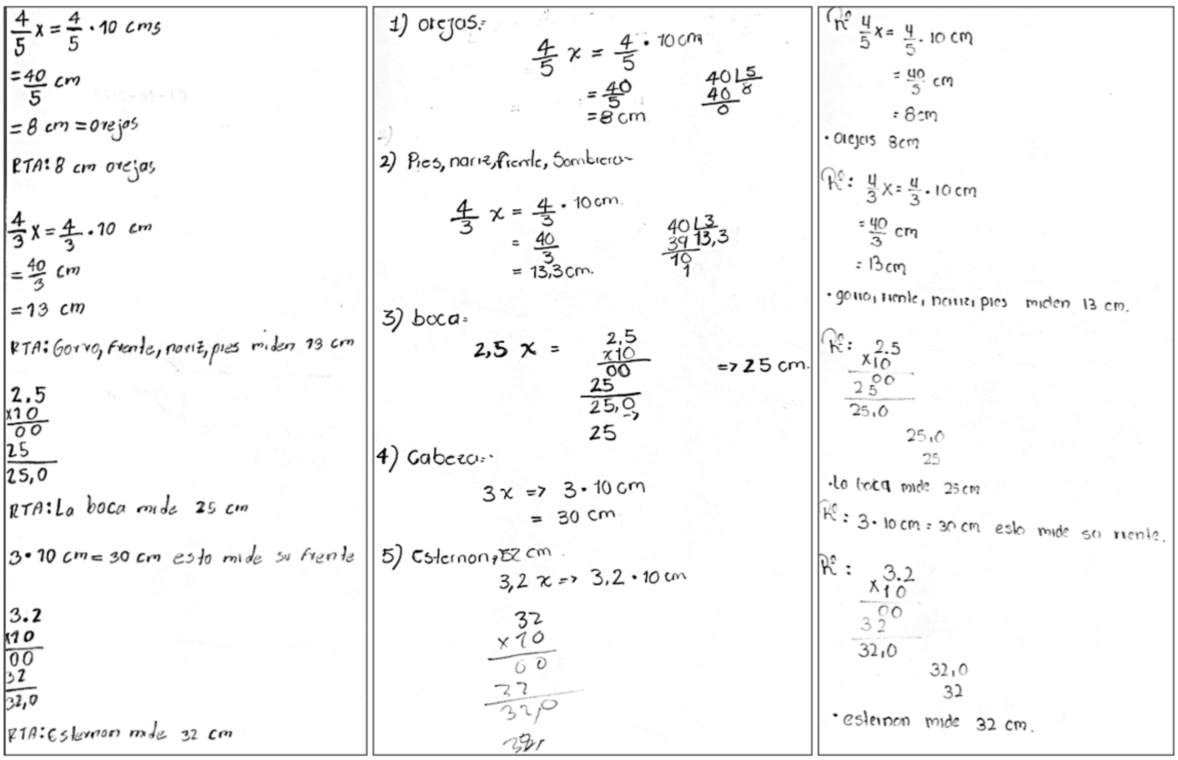


Figura 10. Algunas respuestas de los estudiantes a la Actividad 2.

En esta actividad todos los estudiantes realizaron correctamente el proceso de determinación de las longitudes por medio de una multiplicación del factor de proporcionalidad por la longitud de referencia. Como se mencionaba, en esta Unidad se dispusieron 2 actividades, pues esta se perfilaba como un leve repaso sobre el concepto de variable y la multiplicación de fraccionarios y decimales. En este sentido, era de esperarse que sus resultados reflejaran un buen desempeño, sin embargo, no debe despreciarse la importancia de esta, pues el desarrollo exitoso de la siguiente Actividad 3 dependía de claridad al respecto de cómo se operaba con el valor de referencia, ya que, para este otro caso, eran estos valores dados los que el estudiante debía encontrar.

5.1.3. Cierre

En la tercera sesión, denominada Cierre dentro de la secuencia didáctica, se implementó la Actividad 3 (Anexo C), "Reconstruyendo la cara triangular". En ésta se le ofreció al estudiante una imagen de referencia de una de las estatuas de San Agustín denominada la Cara Triangular; a la vez, se le daba la misma imagen, pero esta vez cada una de sus partes (Ojos, Nariz y Boca) estaban por fuera de la misma y tenían sus longitudes alteradas con respecto a la original. En la Figura 11 se observa cómo se les dispusieron estos elementos a los estudiantes en su actividad.

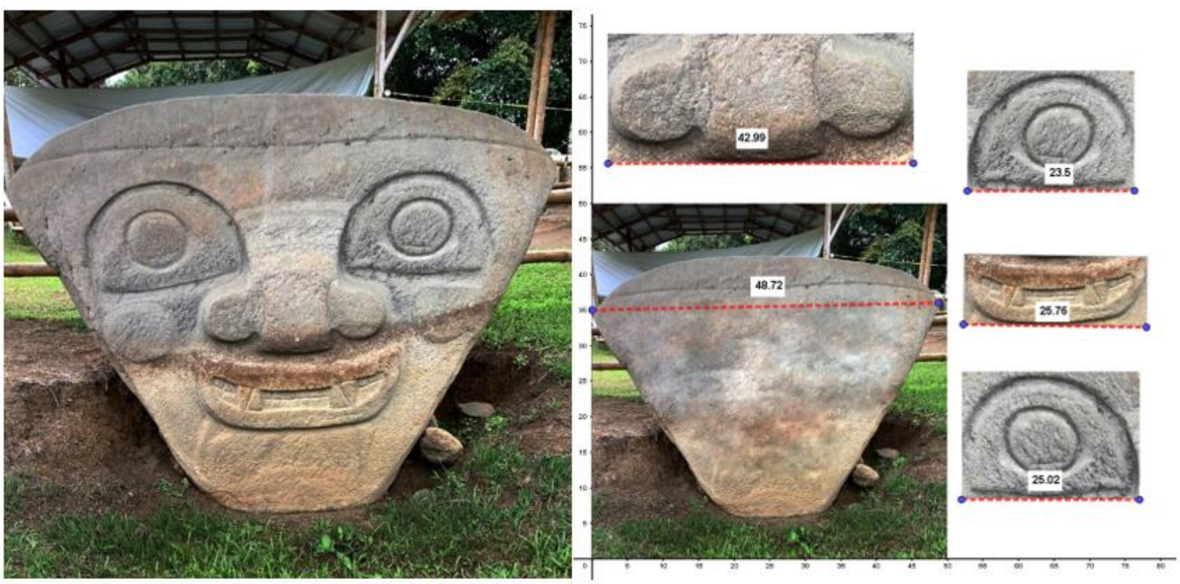


Figura 11. Cara Triangular en la Actividad 3.

Dentro de la actividad, se establecieron 3 preguntas guías para el desarrollo, en las cuales se le solicitó al estudiante determinar constantes de proporcionalidad para cada diferente medida.

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad por la que habría que multiplicar el tamaño más ancho de la figura de tal manera que se obtenga el tamaño del ojo derecho? ¿y cuál es para el ojo izquierdo?
- ¿Por cuál constante habría que multiplicar el tamaño de la nariz para que el resultado sea el valor más ancho dado de la cara (48,72cms)?
- Con respecto a la boca, ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que nos serviría para calcular el valor del tamaño correcto de la boca en función del tamaño conocido?

Con respecto a las preguntas, se solicitó al estudiante hallar el valor de las distintas constantes de proporcionalidad con las cuales tendrían que multiplicarse las diversas longitudes en la cara triangular para así obtener alguna otra de las longitudes. En este sentido, bastaba con que el estudiante dividiera las longitudes, la más ancha de la cara triangular entre la longitud de cada ojo, entre la longitud de la nariz y entre la longitud de la boca. Algunas de estas respuestas pueden verse en la Figura 12.

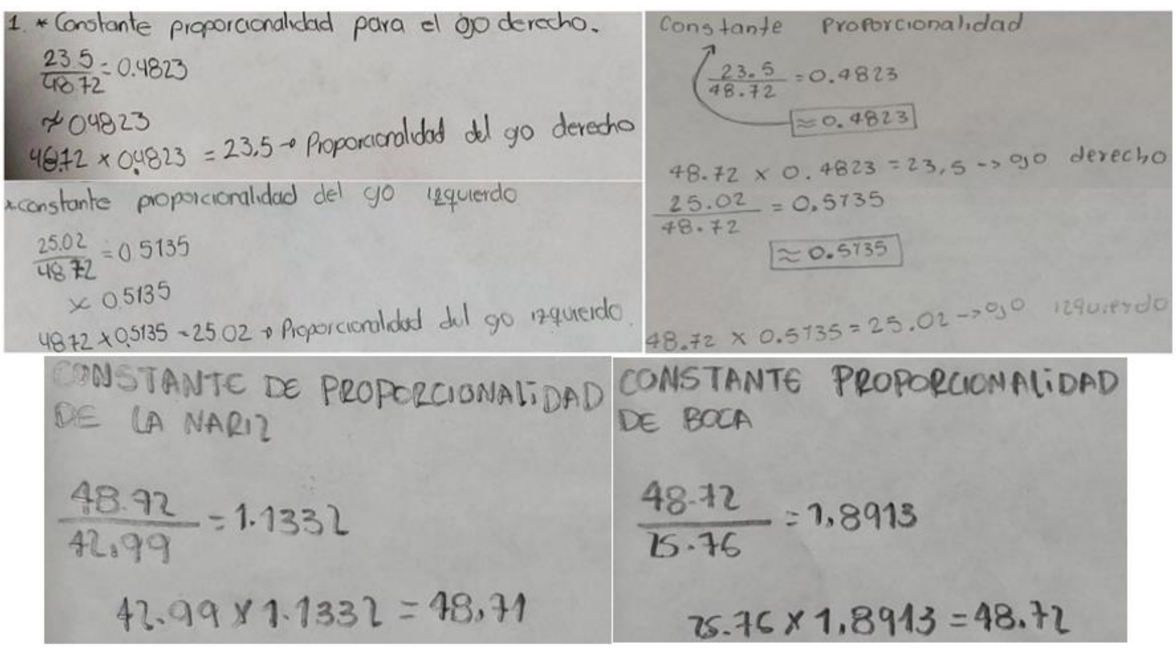


Figura 12. Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 de la Actividad 3.

Como es posible observar, los estudiantes no tuvieron dificultades al determinar estas constantes de proporcionalidad. El objetivo de la actividad de cierre consistió en afianzar el concepto de proporcionalidad y la forma en la cual se relacionan las longitudes. Cuando se multiplica una longitud por su constante de proporcionalidad, lo que se está determinando es un valor *proporcional*, mientras que, si se busca la constante, lo que se realiza es el proceso de dividir las longitudes para determinar las *veces* en las cuales una longitud es proporcional a otra.

Se decidió reafianzar este elemento debido a que el establecimiento de relaciones se suele hacer de manera directa, es decir, calculando el elemento proporcional, pero el problema más común que enfrentan los estudiantes en el tema es la determinación de la cantidad en la que una longitud es proporcional a otra, esto se debe a que el pensamiento del estudiante se enfoca en los elementos relacionados y no en la base de la relación (Jin, 2020), en este sentido, la búsqueda por la constante de proporcionalidad es, en esencia, la búsqueda del elemento que relaciona las longitudes proporcionales.

5.2. Pretest – Postest

Para evaluar el avance en el desempeño de los estudiantes en cuanto a los temas de razón, proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa, hizo una prueba Pretest antes de iniciar la secuencia didáctica y una prueba Post test después de desarrollada la secuencia. Ambos exámenes contaban con 10 preguntas en los cuales se abordaron los temas en forma de problemas. Los resultados de ambas pruebas, junto a la diferencia entre ellos, puede verse en la Tabla 6.

Grosso modo, los resultados entre la prueba pre y post test muestran un aumento en promedio de 2,84 puntos, pasando de 4 puntos de media en el pretest a 6,84 de media para el post test. El mayor aumento presentado se observa en el estudiante 16, el cual pasó de obtener 2,5 a 9 puntos.

Tabla 6.
Resultados Prueba Pretest, Postest y diferencia entre estos.

Estudiante	Pre-test	Post-test	Dif.
Est 1	6	7.5	1.5
Est 2	6	7.5	1.5
Est 3	3.5	8.5	5
Est 4	4	5.5	1.5
Est 5	4	6	2
Est 6	2.5	2	-0.5
Est 7	4	7.5	3.5
Est 8	3.5	6.5	3
Est 9	6	6.5	0.5
Est 10	1	6.5	5.5
Est 11	1	4	3
Est 12	6.5	8	1.5
Est 13	3	6.5	3.5
Est 14	5	8	3
Est 15	4.5	8	3.5
Est 16	2.5	9	6.5
Est 17	4	6.5	2.5
Est 18	6.5	8	1.5
Est 19	4.5	7.5	3
Est 20	3.5	6.5	3
Est 21	2.5	7.5	5
Est 22	7	7	0
Promedio	4	6.84	2.84

La distribución de los puntajes de los estudiantes, en cada una de las pruebas, se presenta en la Figura 13.

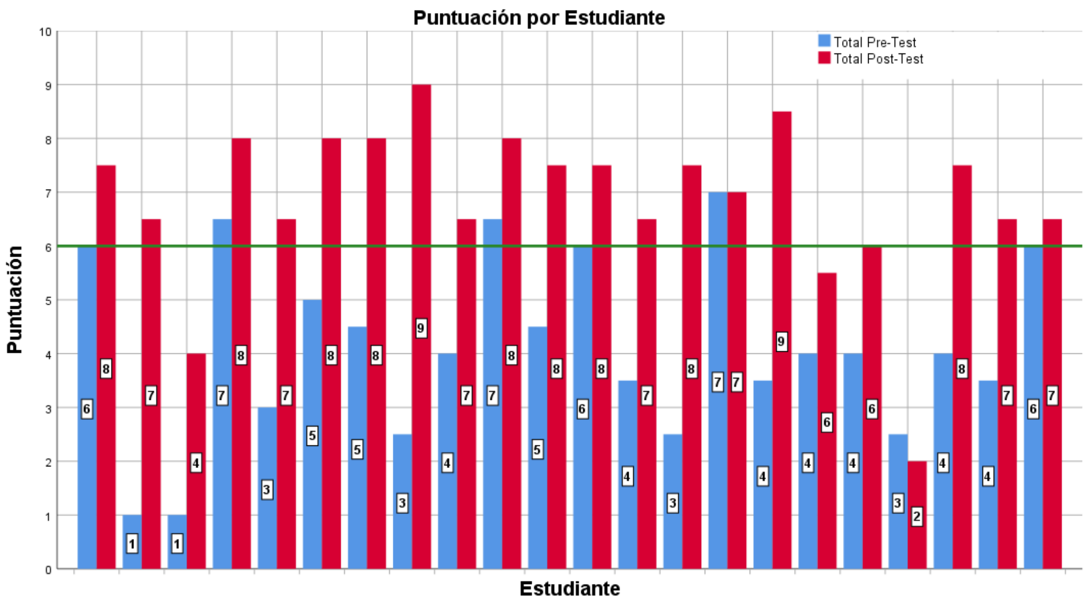


Figura 13. Distribución de puntajes de los estudiantes en Pre y Post test.

Como puede observarse, la diferencia de los resultados aprobatorios (por encima de la línea verde) entre el pretest y el post-test parece significativa. Sin embargo, esto no es suficiente para afirmarlo. Para ello, se realiza la siguiente prueba de hipótesis:

$\boldsymbol{H_i}$: "El promedio de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba Post-Test es significativamente mayor que el promedio de los resultados obtenidos en la prueba Pre-Test".

$\boldsymbol{H_0}$: "El promedio de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba Post-Test NO es significativamente mayor que el promedio de los resultados obtenidos en la prueba Pre-Test"

Se realizará una prueba *t-student,* la cual es "una prueba estadística para evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias" (Hernández-Sampieri y Torres, 2018, p. 310). Los cálculos se realizan con el software SPSS y se obtiene lo siguiente:

Prueba T

Estadísticas de muestras emparejadas

		Media	N	Desv. Desviación	Desv. Error promedio
Par 1	Total Post	6.841	22	1.5383	.3280
	Total Pre	4.136	22	1.7056	.3636

Correlaciones de muestras emparejadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	Total Post & Total Pre	22	.412	.056

Prueba de muestras emparejadas

		Diferencias emparejadas					t	gl	Sig. (bilateral)
					95% de intervalo de confianza de la diferencia				
		Media	Desv. Desviación	Desv. Error promedio	Inferior	Superior			
Par 1	Total Post - Total Pre	2.7045	1.7638	.3760	1.9225	3.4866	7.192	21	.000

La prueba *t-student* nos da un valor de $t = 7.192$ (significancia menor a 0.01) con 21 grados de libertad. Esto indica que se acepta la hipótesis de investigación (H_i) y se rechaza la hipótesis nula (H_0). Lo que es igual a decir que se comprueba que el promedio de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba Post-Test es significativamente mayor que el promedio de los resultados obtenidos en la prueba Pre-Test

5.3. Algunos Resultados Relevantes

Dentro del desarrollo de la prueba post-test, se encontró que algunos estudiantes tuvieron ciertas dificultades, se mostraron confusos con algunos problemas y dieron evidencias de análisis inusuales. En este apartado se mostrarán algunos ejemplos de estos procedimientos que llaman la atención para el análisis.

En el ítem 5 del post test, se presenta el siguiente problema:

> Seis obreros enlosan 1200 metros cuadrados de suelo en cuatro días. ¿Cuántos metros cuadrados enlosarán 12 obreros en cinco días?

Este ejercicio es de proporcionalidad compuesta y se proyectó ser resuelto por los estudiantes de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 6 & \rightarrow & 1200 & \rightarrow & 4 \\ 12 & \rightarrow & x & \rightarrow & 5 \end{array}}$$

$$\rightarrow \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1200}{x} \rightarrow \frac{24}{60} = \frac{1200}{x} \rightarrow \boxed{x = 3000}$$

Sin embargo, la estudiante 17 presentó una solución en la cual determinaba, de manera inicial, la cantidad de metros cuadrados que los obreros enlosan por día, luego este dato lo multiplicó por la cantidad de días que los mismos obreros trabajarían, para finalmente multiplicar esto por 2, pues es el doble de la cantidad de obreros originales según el problema (Figura 14).

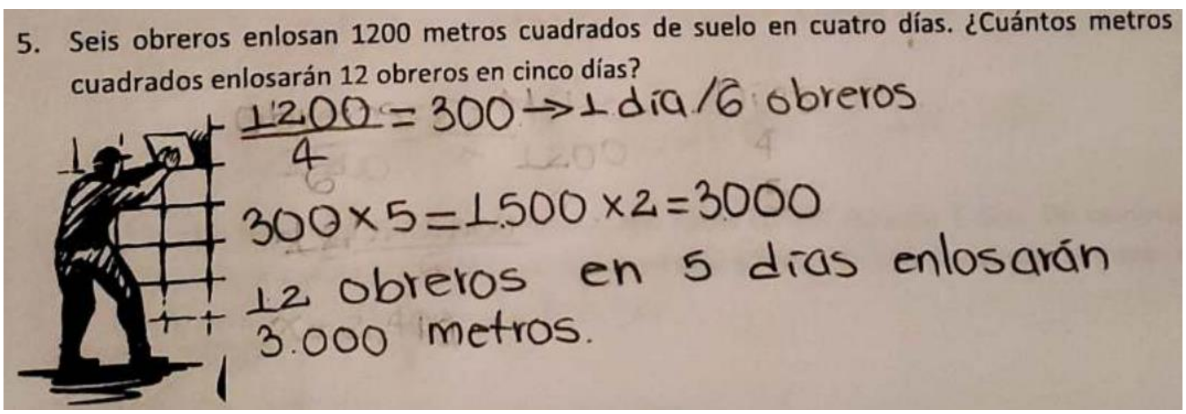


Figura 14. Solución del problema 5 del post test por la estudiante 17.

Este razonamiento muestra un avance en la conceptualización de la proporcionalidad superior al mero conocimiento mecanicista del proceso, el análisis hecho por la estudiante se basas en el entendimiento de la razón entre la cantidad enlosada por el tiempo. Esto es señalado por Diba y Prabawanto (2019) en su análisis sobre la solución a problemas de razones y proporciones como un pensamiento ligado al concepto de ecuación. En este caso, la estudiante plantea la solución de tal forma que se busca el valor de la variable “cantidad enlosada por día”, para ser reemplazada en una ecuación donde se tiene la cantidad de tiempo dada.

Su planteamiento estructurado de esta forma sería:

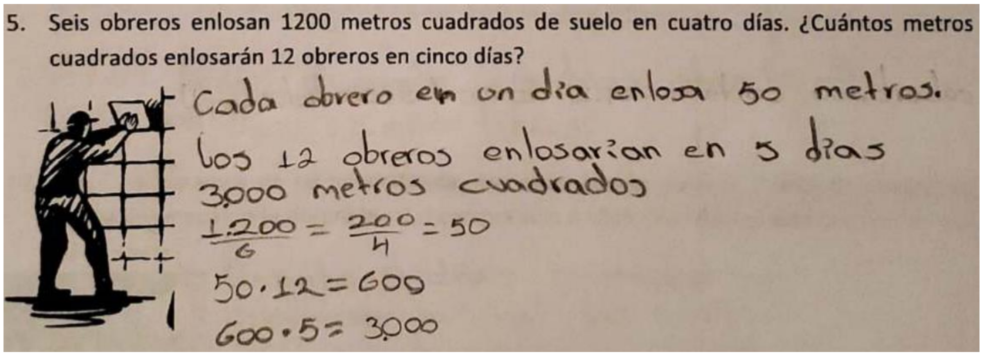
$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{D_i} \\ y' = (x \cdot 2)D_j \end{cases}$$

Donde x es la cantidad de metros cuadrados enlosados por 6 obreros en un día (incógnita inicial); y es la cantidad de metros enlosados por 6 obreros en 4 días (1200); D_i la cantidad de días del primer enunciado (4); y'es la cantidad de metros cuadrados enlosados por los 12 obreros en 5 días; y D_j la cantidad de días del segundo enunciado (5).

De donde se genera la solución dada por la estudiante

$$\boxed{x = \frac{1200}{4} = 300} \rightarrow \boxed{y' = (300 \cdot 2) \cdot 5 = 3000}$$

Una solución alterna, pero en este mismo sentido, puede observarse en la Figura 15, donde otra estudiante decidió dividir el trabajo realizado (1200 mts^2) entre los 6 días, para luego el resultado dividirlo entre los 4 obreros y así conseguir lo que haría un obrero cada día. Posteriormente, tomó el resultado y lo multiplicó por la nueva cantidad de obreros (12) y luego por la otra cantidad de días (5) y así obtuvo el resultado buscado.


5. Seis obreros enlosan 1200 metros cuadrados de suelo en cuatro días. ¿Cuántos metros cuadrados enlosarán 12 obreros en cinco días?

Cada obrero en un dia enlosa 50 metros.

los 12 obreros enlosarian en 5 dias 3000 metros cuadrados

$\frac{1.200}{6} = \frac{200}{4} = 50$

$50 \cdot 12 = 600$

$600 \cdot 5 = 3000$

Figura 15. Solución del problema 5 del post test por la estudiante 19.

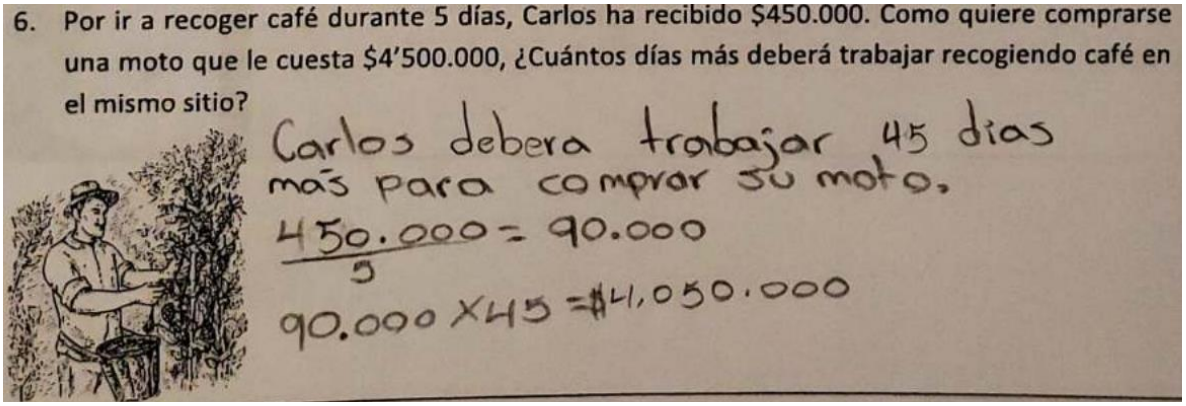
Algo similar sucede con esta misma estudiante 19 y su respuesta al ejercicio 6. El problema planteado en este ítem se enunció de la siguiente manera:

> Por ir a recoger café durante 5 días, Carlos ha recibido $450.000. Como quiere comprarse una moto que le cuesta $4’500.000, ¿Cuántos días más deberá trabajar recogiendo café en el mismo sitio?

La proporcionalidad que se le pide al estudiante determinar, en este caso, es directa, y se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} 5 & \rightarrow & 450.000 \\ x & \rightarrow & 4'500.000 \end{matrix} \rightarrow x = \frac{4'500.000 \cdot 5}{450.000} \rightarrow \boxed{x = 50}$$

Con esto, el estudiante debería determinar la cantidad de días x que se debería trabajar recogiendo café para que el trabajador ganara los $4'500.000$. Sin embargo, como ya había trabajado 5 días, la respuesta correcta sería 45. La forma en la que la estudiante resolvió el problema fue determinando la cantidad de dinero que recibe el trabajador por día y esta cantidad multiplicándola por la cantidad de días de tal manera que obtuviera la cantidad restante de lo que necesita (Figura 16).



6. Por ir a recoger café durante 5 días, Carlos ha recibido $450.000. Como quiere comprarse una moto que le cuesta $4’500.000, ¿Cuántos días más deberá trabajar recogiendo café en el mismo sitio?

Carlos debera trabajar 45 dias más para comprar su moto.

$\frac{450.000}{5} = 90.000$

$90.000 \times 45 = \$4,050.000$

Figura 16. Solución del problema 6 del post test por la estudiante 19.

Estas respuestas alternativas al procedimiento mecanicista dan cuenta del conocimiento adquirido en cuanto a proporcionalidad directa y compuesta, sin embargo, en cuanto a proporcionalidad inversa, se encontró una fuerte dificultad. En el ítem 4 del post test se trabajó esta cuestión y la totalidad de los participantes erraron en su solución. El problema de este numeral se enunció y se acompañó de una imagen como muestra la Figura 17.

4. Dos ruedas están unidas por una correa de transmisión en un vehículo. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas. ¿Cuántas vueltas dará la segunda?

Figura 17. Presentación del Ítem 4 de la prueba Post Test.

La proyección de su solución, mecánicamente, se planteó como sigue:

$$\begin{array}{ccc} 25 & \rightarrow & 300 \\ 75 & \rightarrow & x \end{array} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 300}{75} \rightarrow \boxed{x = 100}$$

Sin embargo, todos los estudiantes participantes lo resolvieron erróneamente como se puede observar en la

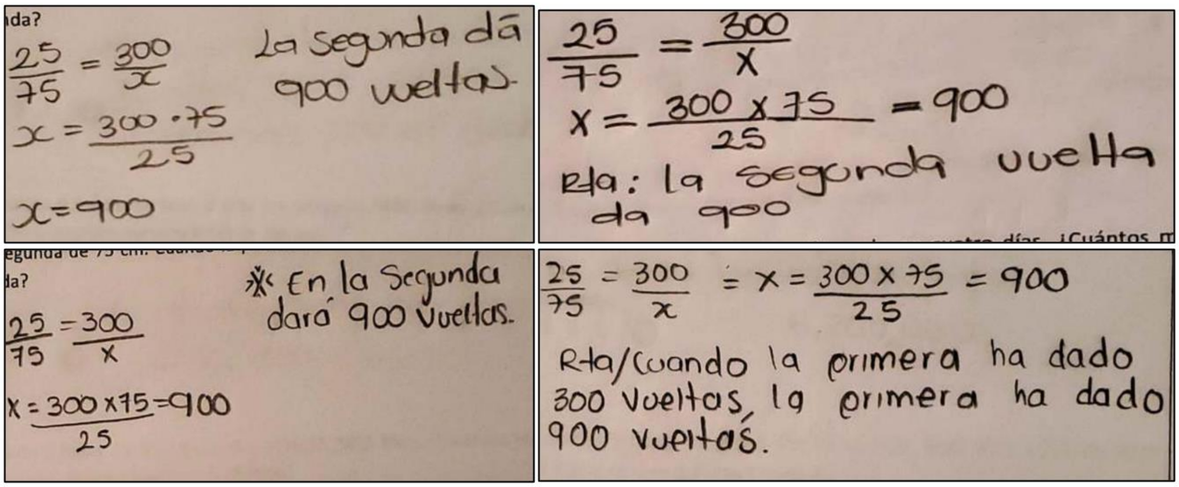


Figura 18. Ejemplos de soluciones al ítem 4 de la prueba Post Test.

El motivo de esta confusión suele relacionarse con monotonía de ejercicios, la costumbre mecanicista y la falta de reflexión (Diba y Prabawanto, 2019). Los estudiantes, después de resolver varios ejercicios de proporcionalidad directa, asumen que el que responden a continuación sigue siendo del mismo tema, por lo tanto, aplican la técnica que tienen mecanizada y cometen el error. Este tipo de ejercicios requiere un mayor tiempo de reflexión, un análisis de la situación con el cual el estudiante comprenda que la relación que se plantea entre los elementos del problema es inversa en lugar de directa y así puedan enfrentarlo adecuadamente.

5.4. Respuestas a las Preguntas de Investigación

5.4.1. ¿Cómo influye en el aprendizaje de los estudiantes, sobre el concepto de proporcionalidad, el empleo de una secuencia de actividades basadas en la matematización de esculturas Andaquíes?

Es posible decir que la influencia en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto de proporcionalidad, cuando se empleó la secuencia de actividades basadas en la matematización de esculturas Andaquíes fue positiva, pues el promedio de los resultados del post test fue significativamente mayor ($t = 7.192,\ gl = 21,\ \alpha < 0.01$) al promedio de los resultados del pretest.

Esto se puede afirmar también en función del avance en sus procedimientos. Al igual que lo describieron Gutiérrez, Prieto y Ortiz (2017), los estudiantes pasan por la identificación de los objetos vinculados en el problema, elaboran un boceto de la solución y toman la decisión de abordar el problema. A pesar de que los estudiantes no presentaban estos bocetos y resulta complejo determinar lo que mentalmente identifican, es posible entre ver sus aproximaciones en las marcas que dejan sobre el papel al borrar, al igual que sus notas en la margen, antes de presentar en limpio. En la Figura 19 pueden verse algunos ejemplos de estos en los que es posible notar acercamientos previos y operaciones auxiliares en donde se manifiestan sus procesos cognitivos, los elementos clave que identifican y el procedimiento que llevan a cabo para resolver el problema planteado.

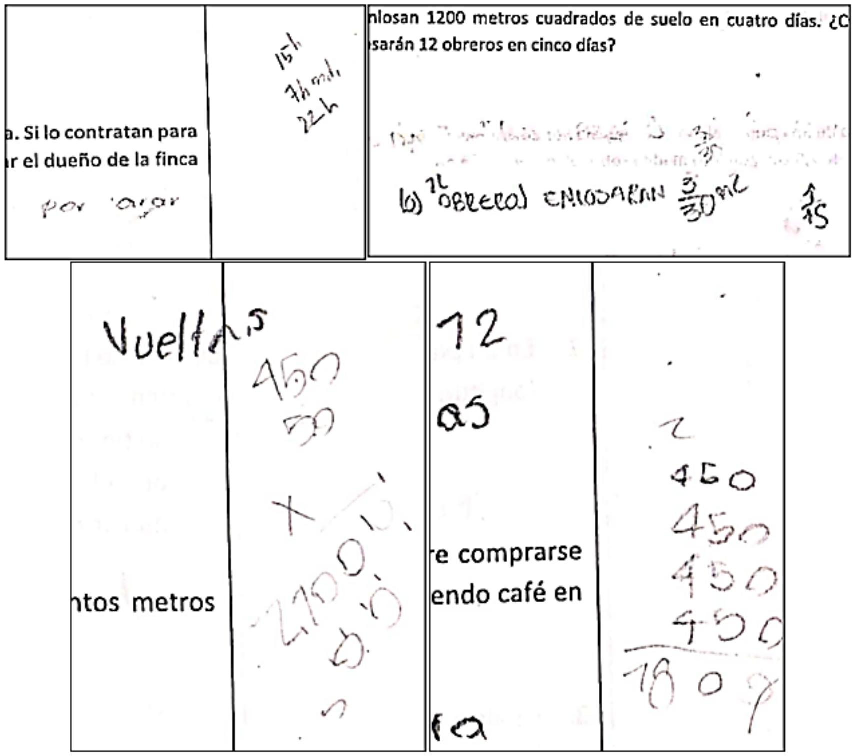
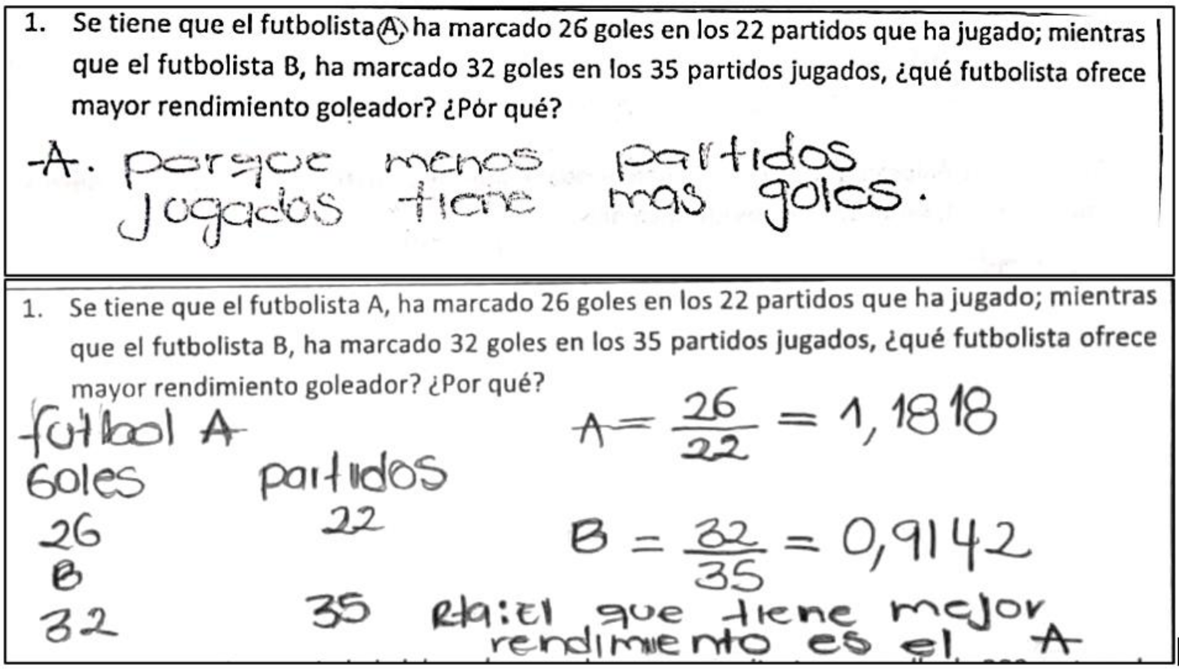


Figura 19. Marcas tenues sobre el papel y notas al margen de los estudiantes.

Por otro lado, otra forma de ver el avance de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad es analizar comparativamente la solución de un mismo problema antes y después de la implementación de la secuencia. Por ejemplo, una comparación con base en las respuestas de la estudiante Andrea (seudónimo) puede ser ilustrativo de este punto. El problema en cuestión se enunció de la siguiente manera:

> Se tiene que el futbolista A, ha marcado 26 goles en los 22 partidos que ha jugado; mientras que el futbolista B, ha marcado 32 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador? ¿Porqué?

Sus respuestas antes (arriba) y después (abajo) de la implementación de la secuencia puede verse en la Figura 20. En esta es posible apreciar que, antes de la implementación de la secuencia de actividades de matematización enfocadas en la proporcionalidad, a pesar de tener la respuesta correcta al problema, la presenta en lenguaje natural, sin ningún argumento numérico, ni operación que mostrara lo que se buscaba (en este caso, un factor de proporcionalidad). Posterior a la implementación, es posible ver el procedimiento buscado, una estructura de su planteamiento al problema y la respuesta que determina la solución correcta al problema.



1. Se tiene que el futbolista A, ha marcado 26 goles en los 22 partidos que ha jugado; mientras que el futbolista B, ha marcado 32 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador? ¿Pór qué?

-A. porqoe menos partidos jugados tiene mas golos.

1. Se tiene que el futbolista A, ha marcado 26 goles en los 22 partidos que ha jugado; mientras que el futbolista B, ha marcado 32 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador? ¿Por qué?

futbol A

Goles partidos

26 22

B

32 35

$A = \frac{26}{22} = 1,1818$

$B = \frac{32}{35} = 0,9142$

Rta: el que tiene mejor rendimiento es el A

Figura 20. Solución de Andrea al problema, antes y después de la implementación.

Ejemplos de este tipo se encuentran en todos los estudiantes cuyo promedio entre la prueba pre y post test aumentó. Otro que lo ilustra bien es el caso de Andrés (seudónimo), con el problema del enlosado de los obreros, el cual se enunció de la siguiente manera:

> Seis obreros enlosan 1200 metros cuadrados de suelo en cuatro días. ¿Cuántos metros cuadrados enlosarán 12 obreros en cinco días?

El estudiante, al igual que Andrea, dio la respuesta al problema, antes de la implementación, sin ninguna muestra de procedimiento, argumentación u operaciones realizadas; posteriormente, luego de aplicada la implementación, muestra un entendimiento del concepto que le permite trabajar la proporcionalidad subdividiendo el proceso según su percepción y llegando a la respuesta de manera precisa, correcta y argumentada. En la

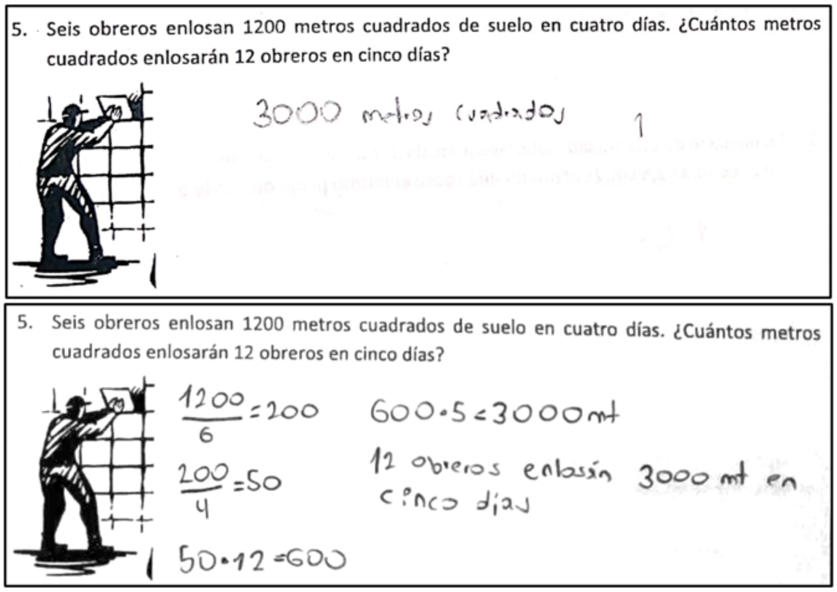


Figura 21. Solución de Andrés al problema antes y después de la implementación.

5.4.2. ¿Es posible matematizar las dimensiones de las esculturas Andaquíes y establecer relaciones y proporcionalidad?

Como se puede ver en el conjunto de actividades de la secuencia diseñada, es posible, de parte de los estudiantes, realizar el proceso de matematización de las dimensiones en las esculturas Andaquíes y establecer las relaciones de proporcionalidad que están inmersas en los planteamientos de los problemas.

La matematización, como lo describió Freudenthal (1991), es una necesidad de los estudiantes que debe suplirse en la formación en matemáticas a cualquier nivel, si lo que se pretende es conectar la enseñanza a su realidad cerca. Los elementos de matematización que se prepararon para los estudiantes, los vinculaba con una cultura cercana, propia de la región Surcolombiana, la de los Andaquíes. Sus estatuas, conocidas a nivel mundial, poseen diferentes elementos los cuales tienen longitudes que guardan relaciones de proporcionalidad entre sí. Aprovechando esto, se utilizaron estatuas como la del chamán, la cara triangular, el bebé en brazos, entre otras, para analizar estas proporcionalidades y generar actividades en donde el estudiante pudiera adentrase en la resolución de éstas mediante la matematización.

En la Figura 22 pueden observarse las figuras utilizadas para las actividades y la forma en la cual se describieron sus longitudes con colores y diseño de cotas. Estos elementos se combinaron con enunciados y preguntas guías que fueron resueltos por los estudiantes con base en su proceso de matematización, establecimiento de relaciones, proporciones directas y proporciones inversas, además del cálculo de constantes de proporcionalidad.

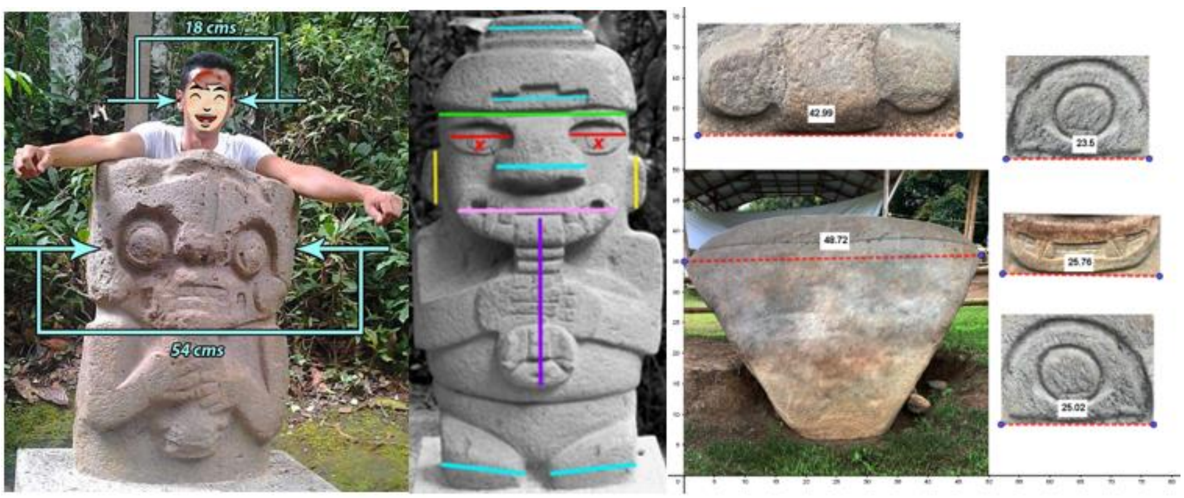


Figura 22. Estatuas de los Andaquíes utilizadas en las actividades.

Los resultados de los estudiantes en las diferentes actividades evidencian que se dio el proceso de matematización buscado, se hicieron los cálculos requeridos y se establecieron las relaciones de proporcionalidad adecuadas en función de cada planteamiento. Ejemplos de este proceso se han mostrado a lo largo del análisis, pero con el fin de recapitular se presentan algunas de las respuestas que los estudiantes dieron en las actividades (Figura 23).

1) CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD PARA el ojo DERECHO

$\frac{23.5}{48.72} = 0{,}4823$

$\approx 0{,}4823$

$48.72 \times 0{,}4823 = 23{,}5$

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD PARA EL OJO IZQUIERDO

$\frac{25.02}{48.72} = 0{,}5135$

$\approx 48.72 \times 0{,}5135 = 25{,}21$

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD DE LA NARIZ

$\frac{48.72}{42.99} = 1.1332$

$42.99 \times 1.1332 = 48{,}71$

CONSTANTE PROPORCIONALIDAD DE BOCA

$\frac{48.72}{25.76} = 1{,}8913$

$25.76 \times 1{,}8913 = 48.72$

Solución

1. Constante proporcionalidad para el ojo derecho = 0,4823

Constant propor =

$\frac{23.5}{48.72} = 0{,}4823$

$x = 0{,}4823$

$48.72 \times 0{,}4823 = 23{,}5$

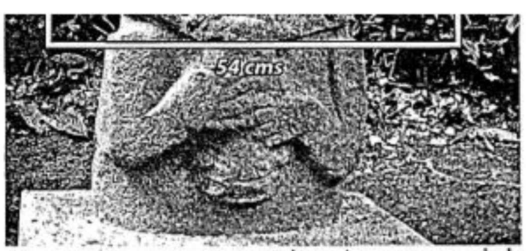
Constante proporcionalidad para el ojo izquierdo = 0,5136

Constant propor =

$\frac{25.02}{48.72} = 0{,}5135$

$x = 0{,}5135$

$48{,}72 \times 0{,}5135 = 25{,}01$



solución

1. mide 26cm, no es igual a la del chaman.

2. $\frac{18}{54} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Rta= cabrían $\frac{1}{3}$ en la cabeza del chaman.

3. $\frac{54}{4} = 13{,}5$ cm Rta= la nariz del chamán mide 13,5 cm.

4. $\frac{3}{5} \times 54 = \frac{162}{5} = 32{,}4$ cm Rta= la boca del chaman mide 32,4 cm.

mi boca mide 6cm.

*tendría que multiplicar por 6x5=30.

Figura 23. Ejemplos de matematización y resolución de las actividades.

5.4.3. ¿Cuáles son los alcances de las capacidades de los estudiantes en cuanto a la matematización de las dimensiones de las esculturas Andaquíes y su relación con la proporcionalidad?

Dentro del planteamiento de las actividades de la secuencia didáctica basada en la matematización de las estatuas de los Andaquíes que se diseñaron, están inmersas características que promueven la visualización matemática. Con estos elementos se buscó el desarrollo de los tres tipos de aprehensiones, perceptiva, discursiva y operatoria, las cuales permiten que el estudiante desarrolle habilidades matemáticas dentro del dominio del conocimiento con el que se trabaja (Duval, 1995; Torregosa y Quesada, 2007; Marmolejo y Vega, 2012; Orozco, Morales-Morgado y Campos, 2016).

Dentro de las capacidades del estudiante relacionadas con la proporcionalidad que se han evidenciado en los resultados de obtenidos por ellos al desarrollar las actividades se pueden destacar:

- Establecimiento de razones entre elementos.
- Determinación de proporcionalidades y aplicación de sus propiedades.
- Solución de problemas que involucran proporcionalidad.
- Entendimiento de los tipos de relaciones entre las magnitudes:
  - Proporciones directas
  - Proporciones inversas
  - Proporciones compuestas

Estos elementos se relacionan con los estándares de aprendizaje sobre el tema que describe el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2021), en los que se describe, en el marco del pensamiento y los sistemas numéricos, que el estudiante debe "justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa" (p. 5); además, como muestra del desempeño y la comprensión que posee, el estudiante "usa las propiedades de las proporciones para encontrar las cantidades"; "utiliza las propiedades de la proporcionalidad en la solución de problemas" y "aplica los conceptos aprendidos en la solución de problemas que involucran la proporcionalidad" (p. 5).

En este sentido, es posible decir que la secuencia de actividades planteadas abordó directamente las consideraciones normativas reguladas, lo cual justifica su pertinencia. Además, con base en los resultados, se puede justificar su eficacia e importancia en la incorporación dentro del desarrollo normal del curso de matemáticas.

5.5. Implicaciones para la Enseñanza

Con base en los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia de actividades basadas en la matematización de las estatuas de los Andaquíes, se proponen las siguientes cuestiones que fungen como recomendaciones para la enseñanza del tema:

- Contextualizar las actividades en situaciones cercanas al estudiante puede promover el compromiso de éstos en su desarrollo.
- El uso de problemas en lugar de ejercicios tradicionales favorece el desarrollo de habilidades de análisis y reflexión de los estudiantes, así que se sugiere, en la medida de lo posible, que los enunciados planteados no se puedan resolver de manera inmediata.
- Se debe evaluar la justificación del proceso de solución de los problemas en donde trabaje con proporcionalidad, pues es en estos planteamientos que realiza el

estudiante en donde puede evidenciarse su avance, comprensión y nivel de dominio del concepto y operaciones vinculadas.

- Aunque la proporcionalidad es un tema que suele manejarse por medio de reglas de tres, es necesario dejar esta mecanización como última estrategia, posterior al desarrollo de la comprensión de los estudiantes, pues el entendimiento de las relaciones entre las longitudes es base para procesos más complejos, los cuales no podrá dominar el estudiante si su conocimiento es meramente mecanicista.
- Los problemas de proporcionalidad pueden tener más de una forma de solución, quien esté llevando la enseñanza en la clase debe estar atento a esto para vincular a los estudiantes con temas más avanzados cuando se presente la oportunidad. Elementos algebraicos como lo son los conceptos de variable y las relaciones funcionales, pueden ser introducidos a través de soluciones alternativas que presenten los estudiantes.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

La secuencia de actividades planteada con base en la matematización de las estatuas Andaquíes influyó positiva y significativamente en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes en los temas de razón, proporcionalidad directa e inversa. Los resultados muestran un aumento del resultado promedio de los estudiantes en las pruebas realizadas antes y después de la implementación de la secuencia.

Los estudiantes abordaron los problemas de razón, proporcionalidad directa e inversa, mediante la identificación de los elementos de las estatuas, la matematización de sus longitudes, la relación entre ellas y el cálculo de las proporciones y constantes de proporcionalidad. Esto generó mejoras en su capacidad para percibir, argumentar y operar con las relaciones entre las longitudes.

El compromiso de los estudiantes en la solución de las actividades se logró por medio del empleo de un contexto relevante y cercano para ellos. Las estatuas de los Andaquíes constituyen una parte de la cultura de la región Surcolombiana que les es familiar y los motiva a adentrarse en la solución de los problemas. Con esto, los estudiantes desarrollaron un conjunto amplio de habilidades y competencias relacionadas con el tema y que están en la misma ruta que los estándares planteados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Con la elaboración de este trabajo es posible rescatar la importancia de la contextualización de las actividades, el uso de problemas en lugar de ejercicios tradicionales, la evaluación de la justificación del procedimiento de solución, las características introductorias que pueden extender la temática a cuestiones algebraicas y el carácter comprensivo más allá del mecanicista del proceso. Sin embargo, es claro que aún es posible potencializar más la propuesta.

Una de las cuestiones en las que se puede extender el estudio es hacia el uso de la geometría dinámica, el cual puede ser utilizado para fomentar la comprensión de los conceptos en un nivel de dominio mayor, a la vez que elimina las posibles concepciones de unicidad de las respuestas de los estudiantes. El acompañamiento de herramientas como la computadora puede facilitar al estudiante el cálculo de operaciones necesarias para la resolución de los problemas, dinamizar el planteamiento para llegar a niveles de adecuación personalizados y expandir las posibles experiencias del estudiante en el aprendizaje del tema.

Junto a esto, resulta recomendable enfocar estas actividades de matematización a diferentes temáticas de aprendizaje dentro de las matemáticas. Existen multitud de temas, como el álgebra de polinomios, la geometría analítica y la trigonometría, que pueden beneficiarse de la contextualización con elementos reales del entorno de los estudiantes y del análisis de las características inmersas en figuras, objetos, situaciones o fenómenos; dejar de realizar estos procesos de matematización implica la pérdida de una oportunidad para el avance del conocimiento de los estudiantes, del dominio de las técnicas y procedimientos, y de la comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Arroyave, E. A. (2018). *Diseño de una secuencia didáctica para favorecer el proceso enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa mediado por la metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) en el grado séptimo de la I. E. Villa del Socorro* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*(1-10), 1-10.

Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. *Medical education, 20*(6), 481-486.

Barrows, H. S. (1996). Problem-based learning in medicine and beyond: A brief overview. *New directions for teaching and learning*, *1996*(68), 3-12.

Belloch, C. (2017). Diseño Instruccional. Valencia, España: Unidad de Tecnología Educativa, UTE: Universidad de Valencia. Recuperado el 26 de marzo de 2019, de http://148.202.167.116:8080/xmlui/handle/123456789/1321

Bentancor, J. G. (2017). *La matematización: una mirada a las prácticas de enseñanza y evaluación de los docentes del Ciclo Básico de una zona Metropolitana de Montevideo* (tesis de maestría). Universidad ORT Uruguay.

Branch, R. M. (2009*). Instructional design: The ADDIE approach (Vol. 722)*. Springer Science & Business Media.

Brogan, D. R., y Kutner, M. H. (1980). Comparative analyses of pretest-posttest research designs. *The American Statistician, 34*(4), 229-232.

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Chairil Hikayat, S., Hairun, Y., y Suharna, H. (2020). Design of realistic mathematics education approach to improve critical thinking skills. *Universal Journal of Educational Research, 8*(6), 2232-2244.

Coronado, J. P. (2007). Las matemáticas y las artes liberales. *Dibujo técnico y matemáticas: una consideración interdisciplinar,* 91.

Cortés, W. F., y Cruz, J. J. (2018). *Enseñanza de la proporcionalidad, más allá de la regla de tres* (tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Crannell, A., Frantz, M., & Futamura, F. (2019). 7. Desargues's Theorem. En *Perspective and Projective Geometry* (pp. 91-116). Princeton University Press.

De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático Elementos del Análisis.* España: Editorial Pirámide.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM, México, consultada el, 10*(04), 1-15.

Diba, D. M., y Prabawanto, S. (2019). The analysis of students' answers in solving ratio and proportion problems. En *Journal of Physics: Conference Series, 1157*(3) p. 032114. IOP Publishing.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. *In Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, 142-157.

Ferrando, I., Segura, C. (2013). Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte. *Modelling in Science Education and Learning, 6*(1), 61-71.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer, Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Gamboa, R., y Moreira, T. E. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Actualidades Investigativas en Educación*, *17*(1), 514-559.

García, Á., Callejo, M., y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gómez-Collado, M. C., Puchalt, J., Sarrió, J., y Trujillo, M. (2013). Modelización de esculturas en la enseñanza de las matemáticas. *Modelling in Science Education and Learning*, *6*(2), 33-41.

Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L., y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática, 29*(2), 37-68. https://doi.org/10.24844/em2902.02

Hernández-Sampieri, R., y Torres, C. P. M. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4). México edo. F DF: McGraw-Hill Interamericana.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., y Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. En B. &. others, *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 161–204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa.* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Im, S. H., y Jitendra, A. K. (2020). Analysis of proportional reasoning and misconceptions among students with mathematical learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior, 57*, 100753.

Jin, S. (2020). Students' proportion problem solving with different units' coordination stages. *Journal of Educational Research in Mathematics, 30*(2), 245-279.

Manzanares, A. (2008). Qué es el Sobre el Aprendizaje Basado en Problemas. En A. González, y A. del Valle López (Eds.), *El Aprendizaje Basado en Problemas: Una propuesta metodológica en Educación Superior* (pp. 14-23). Narcea Ediciones.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática, 24*(3), 7-32.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., y Oller-Marcén, A. M. (2019). Una experiencia de investigación-acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 85-106. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2603

Mazana, Y. M., Suero Montero, C., & Olifage, C. R. (2019). Investigating students' attitude towards learning mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. *14*(1), 207-231.

Mejía, A., Villareal, C., Silva, C., Suarez, D., y Villamizar, C. (2018). Estudio de los factores de resistencia al cambio y actitud hacia el uso educativo de las TIC por parte del personal docente. *Revista Boletín Redipe, 7*(2), 53-63.

Ministerio de Educación Nacional (2021). *Aulas sin fronteras. Matemáticas 7. Unidad 2.* (3ª Ed.). Colombia Aprende – La red del conocimiento (GITEI - UNAL).

Mishra, P., y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, *108*(6), 1017-1054.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1).

Nesterov, A., Nesterova, E., y Sussman, R. (2000). *MAPLE V RV: Manual de Introducción.* Guadalajara: Universidad de Guadalajara.

Núñez, J. C., González-Pienda, J. A., Alvarez, L., González-Castro, P., González-Pumariega, S., Roces, C., y Rodrigues, L. S. (2005). Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. In *Actas do VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagoxía* (pp. 2389-2396).

Obando, G., Vasco, C. E., y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17*(1), 59-81.

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. España: Santillana Educación S.L.

Orozco, R. C., Morales-Morgado, E., y Campos, O. (2016). Creación de Objetos de Aprendizage basados en la teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird. *SérieEstudos, 21*(42), 21-40.

Pérez-Roa, A., Vásquez-Olave, N. (2016). Educación matemática realista: un enfoque para desarrollar habilidades de matematización con alumnos de secundaria.

Ramos, E., y Martínez, C. G. (2020). Uso del Modelo MTSK para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(59), 33-63.

Rengifo, L. (1966). *La proporción Armónica en la estatuaria Agustiniana*. Universidad Nacional. Imprenta nacional.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(2), 47-66.

Rojas, N. A., Sorroza, J. P., Villacis, J. E., Caraguay, W. A., y Sánchez, M. V. (2018). Las Tic y la resistencia al cambio en la Educación Superior. *RECIMUNDO: Revista Científica de la Investigación y el Conocimiento, 2*(2), 477-495.

Sabogal, E. (2019). *Una propuesta didáctica para el aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa en grado séptimo mediante la geometría dinámica* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Serrano, C. B. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza de proporcionalidad a estudiantes de grado séptimo haciendo uso del aprendizaje significativo en diversos contextos* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Tapia, N. S. (2013). *Modelamiento computacional y visual de la información del proyecto estatuaria Isla de Pascua* (tesis de pregrado). Universidad de Chile, Santiago de Chile.

Toro-Zambrano, M. C. (2014). *Descripción de un ejemplar escultórico de San Agustín-Huila* (tesis de maestría). Universidad Santo Tomás de Aquino, Bogotá, Colombia.

Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamercana de investigación en matemática educativa*, 276-300.

Torregrosa, G., Quesada, H., y Penalva, M. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 28*(3), 327–340.

Torres, E., y Deulofeu, J. (2018). La enseñanza y el aprendizaje de a proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *99*, 105-126.

Urbano, R. A. (2010). Geometría en la Esculturas del Parque Arqueológico de SanAgustín. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 3*(1), 45-66.

Urbano, R. A. (2018). *Un diseño de tareas que integra AGD y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Velandia-Jagua, C. A. (2015). La proporción armónica en la estatuaria de la cultura arqueológica de San Agustín, Colombia (solución final para un viejo problema). *Boletín del Museo Chileno de Arte Precolombino, 20*(2), 9-22.

Zalaya, R. (2005). *ESCULTURA MATEMÁTICA: Antecedentes en la Historia del Arte, Desarrollo, Perspectivas de Evolución y Clasificación por Conceptos Matemáticos* (tesis doctoral). Universidad Politecnica de Valencia, Valencia, España.

ANEXOS

6.1. Anexo A. Versión de Estudiantes de Actividad 1

Versión Estudiantes.

TU CABEZA DE CHAMÁN

Nombre: ____**Fecha:** __________________________________

Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los miembros de la clase.

Situación:

En la siguiente fotografía, aparece el joven Carlos, que sobre sale por encima de una de las estatuas que representa un chamán (hay varias de las mismas por el parque de San Agustín). La cabeza del hombre de la foto mide 18 cms de ancho (de oreja a oreja). Mientras que la cabeza del chamán, de borde a borde, mide casi 54 cms.

1. ¿Cuánto mide tu cabeza de oreja a oreja? ¿Igual que la del Chamán?
2. ¿Cuántas cabezas de Carlos cabrían a lo ancho de la cabeza del Chamán?
3. Si te dijera que la nariz del Chamán es cuatro veces más pequeña de ancho que su cabeza, ¿Podrías saber cuánto mide?
4. ¡Y la boca! Resulta que el ancho de la boca del chamán es $\frac{3}{5}$ del ancho de su cabeza. ¿Cuánto mide la boca del chamán? ¿y la tuya? ¿Por cuánto habría que multiplicar el ancho de tu boca para llegar al tamaño de la boca del Chamán?

6.2. Anexo B. Versión de Estudiantes de Actividad 2

Versión Estudiantes.

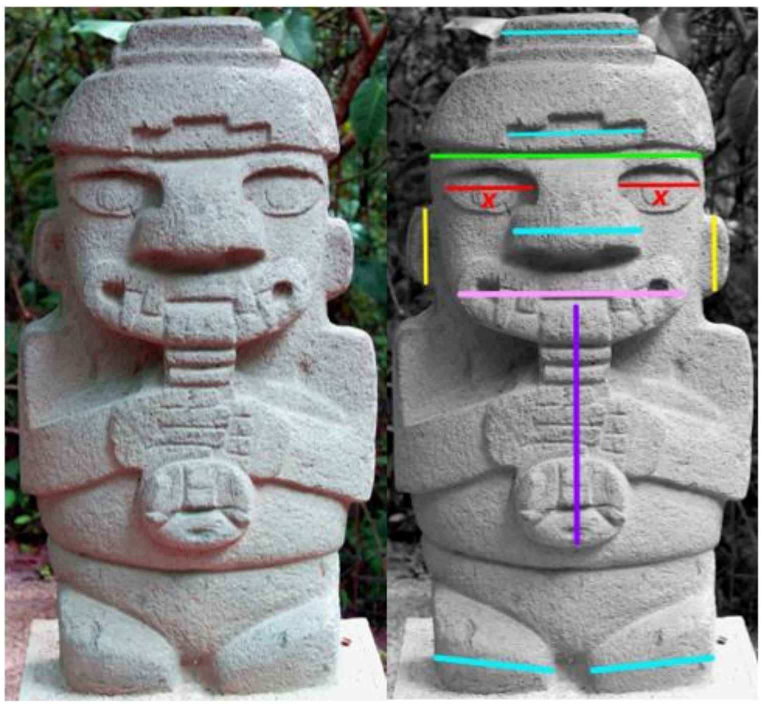
LAS MEDIDAS DEL SEGUNDO CHAMÁN

Nombre: ____**Fecha:** ___________________

Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los miembros de la clase.

Situación:

En las siguientes fotografías está otro de los chamanes del parque de San Agustín. En este caso, se tiene la información sobre la longitud de horizontal de sus ojos (10 cms); y se tiene la relación entre esta medida y el resto de las longitudes marcadas por colores. Necesitarás entender cómo utilizar dichas relaciones, pues se requiere escribir cada longitud sobre la figura.



1. **Las longitudes amarillas son** $\frac{4}{5}x$.
2. **Las azules miden** $\frac{4}{3}x$.
3. **El tamaño de la rosada es** $2.5x$
4. **La longitud de la verde es** $3x$.
5. **La morada mide** $3.2x$.

6.3. Anexo C. Versión de Estudiantes de Actividades 3

Versión Estudiantes.

RECONSTRUYENDO LA CARA TRIANGULAR

Nombre: ____**Fecha:** ____________________

Instrucciones: lea atentamente la situación planteada y responda las preguntas que se realizan al final en compañía de todos los miembros de la clase.

Situación:

En las siguientes fotografías está la estatua conocida como el rostro triangular. A la izquierda se tiene la estatua completa y a la derecha cada una de sus partes por separado. Se sabe que la longitud más ancha de la figura es 48,72 cms y se pretende establecer cuáles son las longitudes reales de los ojos, boca y nariz. Se tendrá que ir modificando el tamaño de los elementos (arrastrando los puntos azules de las esquinas de las partes, en GeoGebra) y reubicándolos en su posición, tomando para ello la imagen de la estatua original de referencia.

1. **¿Cuál es la constante de proporcionalidad por la que habría el tamaño más ancho de la figura tal que nos dé el tamaño del ojo derecho? ¿y cuál es para el ojo izquierdo?**
2. **¿Por cuál constante habría que multiplicar el tamaño adecuado de la nariz para que el resultado sea el valor más ancho dado de la cara (48,72cms)?**
3. **Con respecto a la boca, ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que nos serviría para calcular el valor del tamaño correcto de la boca en función del tamaño conocido?**